

التحليل الرياضي

التوابع ذات متغير واحد

الجزء الثاني

2

تأليف:

ع. شيلوف

تعريب

أبو بكر خالد سعد الله

ديوان المطبوعات الجامعية

الجزائر

1983

تمهيد

يعتمد القسم الثالث من كتاب « التوابع ذات متغير واحد » على نفس المبادئ التي انطلق منها القسمان اللذان سبق نشرهما وقد عبرنا على هذه المبادئ في مقدمة الجزء الاول. ان ترقيم فصول هذا القسم (من 12 الى 16) يتلو ترقيم الجزء الاول (من 1 الى 11).

يلعب الفصل 12 « البنيات الاساسية للتحليل » الدور الرئيسي في هذا القسم الثالث. فقد اعتبرنا في هذا الفصل الفضاءات الشعاعية والفضاءات المترية (خلافًا لما ورد في الفصل 3 من القسم الاول، فإننا اتخذنا هنا فضاءات تابعة بدل مجموعات نقاط من فضاء ذي بعد منته)، والفضاءات النظامية والجبور التنظيمية واخيرا الفضاءات الهيلبرتية. طبقت الجبور التنظيمية على نظرية المؤثرات الخطية في فضاء نظيمي؛ وبصفة خاصة فإن « الحساب المؤثري » للتوابع التحليلية في جبر نظيمي المطبق على جبر المؤثرات الخطية يؤدي الى نظريات من نمط متناوبة فريدولم. كما ان دراسة الفضاء الشعاعي النظامي المؤلف من المتتاليات المحدودة وفضاء التابعيات على الفضاء السالف الذكر مرتبطة بمفهومى النهاية المعممة والجمع المعمم للسلاسل.

قدمنا في الفصل 13 « المعادلات التفاضلية » النظريات الرئيسية الخاصة بحلول المعادلات التفاضلية المعتادة من اجل التوابع ذات القيم المنتمة الى فضاء نظيمي. إن حل معادلة خطية ذات معامل مؤثري ثابت يكتب على شكل تابع اسي لمؤثر؛ عندما نكتب صراحة هذا التابع نحصل على دساتير تعطى حلول معادلة خطية ذات معاملات ثابتة او جملة معادلات من هذا النمط او معادلة من رتبة عالية. انشأنا فيما يخص المعادلات الخطية ذات

المعاملات المؤثرية المتغيرة طريقة تغيير (او تغير) الثابت اما الفصل 14 «النشور المتعامدة» فيهتم اساسا بسلاسل فوري، كما يعتبر اغطا مختلفة لتقارب وقابلية الجمع لهذه السلاسل.

يتناول الفصل 15 «تحويل فوري» الى جانب النظرية الحقيقية المعتادة، مسائل مرتبطة بالساحة العقدية وبصفة خاصة تحويل لابلاس.

نعرض في الفصل 16 «المنحنيات الايسرية» نظرية الانحناء في فضاء متعدد الابعاد.

هذا وتوجد عقب كل عرض (فصل) سلسلة تمارين كما هو الحال في القسمين الاول والثاني، علما اننا نجد اجوبة واشارات الى حلول هذه التمارين في نهاية الكتاب.

المؤلف

هكذا، وبهذه التعديلات التي لا بد منها، يمكننا ان ندرك اكثر الحياة الداخلية للرياضيات وما يشكل، في آن واحد، وحدتها وتنوعها مثل ذلك مثل حي كبير تبعثرت وتكاثرت ضواحيه بشكل فوضوي على الساحة المحيطة به، في حين ان المركز يعاد بناؤه بصفة دورية، ويتم هذا البناء في كل مرة وفق مخطط اكثر وضوحا وجالا ووفق ترتيب اكثر عظمة ومهابة فيهدم الاحياء العتيقة بازقتها الضيقة المضلة ليفتح شوارع تتزايد استقامة وعرضا وجودة تؤدي الى تلك الضواحي.

ن. بورباكي «معمارية الرياضيات»

Bourbaki (1938)

القسم الثالث

فصول مختارة من التحليل الحديث

الفصل 12

البنيات الاساسية للتحليل

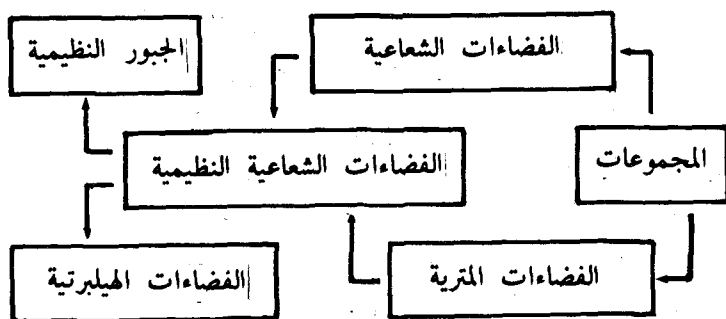
هيلبرت. هو هذا اذن؛ انا اذكره
بطبيعة الحال، كان تلميذي ايامها.
اصبح بعد ذلك شاعرا: بالطبع، لم يكن
له من الاوهام والخيال ما يكفي
للإنشغال بالرياضيات.

تكلمنا قبل الآن في البنيات الرياضية (§ 5.2). لتكلم عنها مرة ثانية
بإيجاز قاصدين وراء ذلك البنيات التي تظهر في التحليل. إن عناصر التحليل
الرياضي هي الاعداد والتوابع والعمليات على هذه الاعداد والتوابع من وجهة
النظر الاكثر عمومية فإن الروابط الموجودة بين تلك العناصر يأتي وصفها في
نظرية المجموعات، إذ ان الأعداد والتوابع تشكل مجموعات متنوعة إن علاقات
الاحتواء وعمليات الاتحاد والتقاطع والانتقال الى المتمم تسمح كلها بوصف
بعض الخواص العامة لهذه المجموعات. إننا نصل الى بنيات اساسية للتحليل
بفرض على هذه المجموعات، شروط اضافية تكتب في شكل جملة من
المسلّمات تتماشى مع بعض الخاصيات او العمليات المستعملة في التحليل الرياضي
القديم (الكلاسيكي). وهكذا ظهرت البنيات الرياضية التالية:

الفضاء الشعاعي حيث نضع العمليتين الخطيتين وهما جمع العناصر وضرب
عنصر في عدد على شكل مسلمات؛ الفضاء المترى حيث نضع بواسطة مفهوم
المسافة عملية الانتقال الى النهاية على شكل مسلمات؛ الفضاء الشعاعي التنظيمي
(« باناخ Banach ») حيث نعتبر العمليتين الخطيتين وكذا الانتقال الى
النهاية، الجبر التنظيمي حيث نضيف الى العمليتين المذكورتين عملية ضرب
العناصر فيما بينها؛ الفضاء الهيلبرتي حيث نضع مفهوم الجداء السلمي في شكل

مسلمات وهو الامر الذي يسمح ليس بالعمل باطوال الاشعة فحسب بل ايضا بالزوايا التي تشكلها هذه الاشعة؛ اخيراً عندما نريد ان يكون عدد الابعاد منتهياً فإننا نصل الى الفضاءات الشعاعية التآلفية (أي بدون مسافة)، والتنظيمية والهيلبرتية (او الاقليدية) ذات الابعاد المنتهية توجد الى جانب البنيات الاساسية المذكورة كمية من البنيات الوسيطة التي نغض عنها الطرف الآن رغم اهميتها البالغة (الفضاءات الطوبولوجية، الفضاءات المرتبة جزئياً، الخ).

هاهي تشكيلة البنيات الاساسية التي سنقوم بدراستها بالتفصيل



يرمز كل سهم الى استلزام اي انتقال من مفهوم عام الى مفهوم خاص.

§ 1. 12 . الفضاءات الشعاعية(*)

11. 12 ننشئ جملة مسلمات الفضاء الشعاعي انطلاقاً من خاصيات الفضاء الحقيقي ذي n بعداً R_n (2. 16) لكن بدون الاخذ بعين الاعتبار الرمز الذي يستعمل الاحداثيات وبتعويض حقل الاعداد الحقيقية R بحقل كفي K (22. 1). على وجه التحديد فإن فضاء شعاعياً K على الحقل K هو تعريفاً لمجموعة اشياء \dots, y, x تسمى اشعة عرفنا عليها عملية الجمع وعملية الضرب في الاعداد (اعداد الحقل K) بحيث تتحقق المسلمات التالية:

$$x + y = y + x . \text{ أ } .$$

ب. $(x + y) + z = x + (y + z)$ مهما كان x, y, z في K .

ج. يوجد في K شعاع نرّمز له بـ 0 (الشعاع المنعدم) بحيث $x + 0 = x$ مهما كان $x \in K$.

د. من اجل كل $x \in K$ يوجد عنصر $y \in K$ يسمى نظير x بحيث $x + y = 0$.

ر. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ مهما كان x, y في K و α في K .

س. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ مهما كان $x \in K$ و α, β في K .

ص. $1 \cdot x = x$ مهما كان $x \in K$.

ط. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ مهما كان $x \in K$ و α, β في K .

إذا كان الحقل K هو حقل الاعداد الحقيقية R يسمى الفضاء K فضاء شعاعياً حقيقياً ونرّمز له هنا بـ R . إذا كان الحقل K هو حقل الاعداد العقدية C يسمى الفضاء K فضاء شعاعياً عقدياً ونرّمز له بـ C .

21. 12. إن مسلمات الجمع أ - د تكرر لـ 12. 1 الخاصة بالاعداد الحقيقية. ولذا فإن النتائج المستخلصة في § 3. 1 من مسلمات جمع الاعداد الحقيقية قائمة في كل فضاء شعاعي: وحدانية الصفر، وحدانية النظير من اجل كل $x \in K$ ، وجود وحدانية حل المعادلة $a + x = b$ ، وهو ما يضمن امكانية اعطاء تعريف سليم لعملية الطرح إن عملية ضرب عناصر فضاء شعاعي فيما بينها غير معرفة وعليه فإن تشابه المسلمات د - ط مع بعض مسلمات ضرب الاعداد الحقيقية الواردة ضمن 22. 1 تشابه مفضل. ذلك هو السبب الذي يجعل بعض النظريات فقط من تلك التي وردت في § 4. 1 صالحة في حالة الفضاءات الشعاعية. القضايا التي تبقي قائمة، بدون تغيير يذكر في البرهان، هي التالية:

أ. (القضية المماثلة لـ 74. 1 - أ). لدينا من اجل كل $x \in K$ المساواة $0 \cdot x = 0$ (يرمز 0 هنا للشعاع المنعدم في الطرف الايمن وللعدد 0 من الحقل

(*) لمزيد من التفاصيل راجع [14].

K في الطرف الايسر).

ب. (القضية المماثلة لـ 74.1 - ب). إذا كان $\alpha x = 0$ فإن لدينا $\alpha = 0$ أو $x = 0$.

ذلك أنه إذا كان $\alpha \neq 0$ فإن لدينا حسب 11.12، ص - ط:

$$x = \frac{1}{\alpha} \alpha x = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0.$$

ج. (القضية المماثلة لـ 94.1). لدينا من اجل كل $x \in K$ المساواة $-x = (-1)x$

31.12. امثلة في الفضاءات الشعاعية. نشير الى اربعة انواع من الفضاءات على حقل الاعداد الحقيقية R :

أ. الاعداد الحقيقية ذاتها مزودة بالعمليتين المعتادتين.

ب. الفضاء الحقيقي R_n ذي البعد n (§ 6.2)

ج. الفضاء $R(E)$ المؤلف من كل التوابع (ذات القيم الحقيقية) المعرفة على مجموعة E مزوداً بالعمليتين المعتادتين (الخاصتين بالتوابع العددية) الجمع والضرب في الاعداد الحقيقية (13.4 - ب).

د. الفضاء $R(E)$ المؤلف من كل التوابع ذات القيم الشعاعية (من فضاء حقيقي R) مزوداً بعملية الجمع وعملية الضرب في الاعداد الحقيقية المعرفتين بطريقة طبيعية على التوابع ذات القيم الشعاعية.

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

إن كل مثال من الامثلة هذه تعميم لسابقة باستثناء المثال الاول. بتعويض حقل الاعداد الحقيقية في الامثلة السابقة بحقل K نحصل على اربعة امثلة من الفضاءات على الحقل K .

د. الحقل K ذاته.

س. الفضاء ذو البعد n : K_n على الحقل K ، المؤلف من كل العناصر ذات الشكل $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ المكوّن كل واحد منها من n عنصراً من الحقل

K نزود هذا الفضاء بعملية الجمع وعملية الضرب في الاعداد المعرفتين
بالقاعدتين التاليتين:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\beta (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta\alpha_1, \dots, \beta\alpha_n)$$

ص. الفضاء $K(E)$ المؤلف من كل التوابع ذات القيم المنتمية الى الحقل K والمعرفة على المجموعة E ، نزود $K(E)$ بالعمليتين المعتادتين (للتوابع) الجمع والضرب في عدد.

ط. الفضاء $K(E)$ المؤلف من كل التوابع ذات القيم الشعاعية (لفضاء K) والمعرفة على المجموعة E ، نزود $K(E)$ بالعمليتين الطبيعيين (للتوابع الشعاعية) الجمع والضرب في عدد.

لم يرد الفضاء الموالى في القائمة اعلاه لكنه ذو اهمية بالغة في التحليل:

ع. الفضاء $R^0(M)$ المؤلف من كل التوابع الحقيقية المستمرة المعرفة على فضاء متري M (*)

لا يمكن تعميم هذا المثال الى حالة التوابع ذات القيم المنتمية الى حقل كفي K لأن مفهوم الاستمرار لهذه التوابع غير معرف عموماً (يتطلب استمرار تابع مسافة في الفضاء الذي يأخذ فيه هذا التابع قيمه؛ في حين اننا لم ندخل أية مسافة في حقل كفي K).

إننا لا نستطيع الآن تعميم المثال ع الآ الى الحالة التي تكون فيها التوابع ذات قيم في الفضاء الحقيقي ذي البعد n : R_n حيث لدينا في آن واحد العمليتان الخطيتان ومفهوم الاستمرار (18.5):

ف. الفضاء $R_n^0(M)$ المؤلف من كل التوابع المستمرة المعرفة على فضاء متري M ، ذات القيم في الفضاء الحقيقي R_n ذي البعد n .

ق. هناك حالة خاصة من المثال ف تجذر الاشارة اليها وهي الفضاء $C^0(M)$ المؤلف من كل التوابع المستمرة على فضاء متري M ذات القيم العقدية.

سنعتبر اقتصاداً مفيداً للمثال ع ضمن 32 - ب.

41. 12. أ نقول عن الاشعة x_1, \dots, x_n من فضاء شعاعي K إنها غير مستقلة خطياً أو مرتبطة خطياً إذا وجدت في الحقل K ثوابت $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ تحقق:

$$(1) \quad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

دون ان تكون كلها منعدمة. اما إذا استلزمت المساواة (1): $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ فإننا نقول عن الاشعة x_1, \dots, x_n إنها مستقلة خطياً

ب. نقول إن فضاء شعاعياً ذو ابعاد n (أو ذو بعد n) إذا وجد n شعاعاً مستقلة خطياً وكان كل $n + 1$ شعاعاً غير مستقلة خطياً إذا وجد n شعاعاً مستقلة خطياً في فضاء K مهما كان $n = 1, 2, \dots$ فإننا نقول إن الفضاء K ذو بعد غير منته

ج. تسمى في فضاء ذي n بعداً K كل مجموعة n شعاعاً مستقلة خطياً اساس K . إذا كان f_1, \dots, f_n اساساً و x شعاعاً كيفياً من الفضاء K فإن الاشعة x, f_1, \dots, f_n هي حتماً غير مستقلة خطياً وتوجد بالتالي ثوابت $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ من K منها غير المنعدم تحقق:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0$$

زيادة على ذلك فإن $\alpha_0 \neq 0$ ولولاه لكانت الاشعة f_1, \dots, f_n غير مستقلة خطياً. إذا قسمنا على α_0 ووضعنا $\beta_j = -\alpha_j / \alpha_0$ (حيث $j = 1, \dots, n$) نحصل على تفكيك (او تحليل) للشعاع x وفق الاساس f_1, \dots, f_n :

$$x = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n.$$

نلاحظ ان هذا التفكك وحيد (ولولاه لكانت الاشعة f_1, \dots, f_n غير مستقلة خطياً).

د. إن الفضاء ذا البعد n R_n (16.2) فضاء شعاعي بعده n بمفهوم التعريف السابق. بصفة خاصة فإن الاشعة:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

مستقلة خطيا بطبيعة الحال. في حين ان كل $n + 1$ شعاعا.

$$y_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$$

$$y_{n+1} = (x_1^{(n+1)}, \dots, x_n^{(n+1)})$$

اشعة غير مستقلة خطيا، وهو ما رايناه ضمن 46.2 كما ان الفضاء K_n (31.12 س) ذو n بعداً بمفهوم التعريف السابق.

ر. لتكن Ω مجموعة غير منتهية على المستقيم العددي: $-\infty < x < \infty$. نرسم بـ

$P(\Omega)$ للفضاء الشعاعي المؤلف من كل كثيرات الحدود:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (\text{من كل الدرجات) المعرفة}$$

على Ω وذات معاملات منتمية الى حقل K نرصد هذا الفضاء بالعمليتين

المتعادتين. إن الفضاء $P(\Omega)$ فضاء شعاعي على الحقل K . لنثبت ان التوابع

$1, x, \dots, x^n$ مستقلة خطياً مهما كان n نفرض ان لدينا المساواة التالية

على Ω :

$$\alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_nx^n \equiv 0$$

نعرض على التوالي بالقيم (المختلفة) $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (من Ω)

فنحصل على جملة معادلات بالنسبة لـ $\alpha_0, \dots, \alpha_n$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1x_0 + \dots + \alpha_nx_0^n &= 0, \\ \alpha_0 + \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_1^n &= 0, \\ \dots & \\ \alpha_0 + \alpha_1x_n + \dots + \alpha_nx_n^n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

التي لها معين غير منعدم (معين فاند موند Vandermonde). ومنه:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ وهو المطلوب.}$$

يتبن من التعريف المعطى في ب ان الفضاء $P(\Omega)$ ذو بعد غير منته

س. لنثبت ان الفضاء $(C^s(M)) (R^s(M))$ المؤلف من كل التوابع

الحقيقية (العقدية) المستمرة على فضاء متري غير منته M ذو بعد غير منته.

نبحث من اجل كل $n = 1, 2, \dots$ عن n تابعا مستقلة خطيا في الفضاء

$R^s(M)$. لتكن t_1, \dots, t_n نقاطا مختلفة من الفضاء M وليكن

$$d = \min_{j, k} \rho(t_j, t_k)$$

نعتبر تابعا مستمرا $y = \varphi(x)$ للمتغير الحقيقي

يساوي 1 من اجل $x = 0$ و $0 < |x| < \delta$. إن التابع $\rho(t_j, t)$ مستمر بالنسبة لـ t (21.5 - ب) إذن فإن $x_j(t) = \Phi[\rho(t_j, t)]$ مستمر ايضا بالنسبة لـ t (51.5) إن التابع $x_j(t)$ يساوي حسب انشائه، 1 من اجل $t = t_j$ و 0 من اجل $t = t_k, k \neq j$. نفرض وجود العلاقة:

$$\alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0$$

وهذا على كل M . نضع في هذه العلاقة $t = t_j$ فنحصل على $\alpha_j = 0$ ($j=1, \dots, n$)، ومنه يأتي الاستقلال الخطي للتوابع $x_j(t)$.

ص. تسمى مجموعة جزئية $E \subset K$ فضاء جزئيا من الفضاء K إذا كان لدينا $x + y \in E$ و $\alpha x \in E$ مهما كان x و y في E ومهما كان العدد $\alpha \in K$. يوجد في كل فضاء شعاعي K فضاءان جزئيان خاصان هما الفضاء المؤلف من العنصر الوحيد 0 ويسمى الفضاء الجزئي المنعدم، والفضاء K نفسه. تسمى باقي الفضاءات الجزئية من K الفضاءات الجزئية الذاتية.

ط. المجاميع المباشرة نقول عن فضاء K إنه مجموع مباشر للفضاءات الجزئية L_1, \dots, L_n من K إذا استطعنا من اجل كل $x \in K$ إيجاد تفكيك:

$$x = x_1 + \dots + x_n, x_1 \in L_1, \dots, x_n \in L_n.$$

وكان هذا التفكيك وحيداً اي إذا كانت الكتابة:

$$(2) \quad x = x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n, x_j \in L_j, y_j \in L_j$$

$$\text{حيث } (j=1, \dots, n) \text{ تستلزم } x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

يمكن تعويض الشرط (2) الخاص بوحدانية كل عنصر x بشرط ابسط منه وهو وحدانية تفكيك الصفر: إذا وجد تفكيك:

$$(3) \quad 0 = x_1 + \dots + x_m, x_1 \in L_1, \dots, x_m \in L_m.$$

$$\text{فإن: } x_1 = \dots = x_m = 0$$

وهكذا نرى بأن الفضاء R_n مجموع مباشر لـ n فضاء بعد كل واحد منها يساوي 1، وهذه الفضاءات مولدة عن n شعاعاً كيفية مستقلة خطياً. كما

نستطيع وضع الفضاء R_n في شكل مجموع مباشر لفضاءات جزئية ابعادها تخالف 1 ، ويتم ذلك بعدة طرق. نشير عموماً انه يوجد من اجل كل فضاء جزئي $R_n \supset L$ فضاء جزئي آخر $R_n \supset M$ بحيث يعطي المجموع المباشر لـ L و M الفضاء R_n بأكمله.

إذا وضع فضاء شعاعي K في شكل مجموع مباشر لفضاءات جزئية L_1, \dots, L_m فإن كل فضاءين من هذه الفضاءات لا يشتركان إلا في شعاع واحد هو الشعاع المنعدم (14؛ 54.2).

ع. فضاء النسبة. نقول عن عنصرين $x \in K$ و $y \in K$ إنها متكافئتان بالنسبة لفضاء جزئي $K \supset L$ إذا كان $x - y \in L$. نرمز لعلاقة التكافؤ بـ $x \sim y$ او باختصار $x \sim y$.

تسمى المجموعة X المؤلفة من كل العناصر y المكافئة لعنصر معطى x صف تكافؤ وفق المجموعة الجزئية L او باختصار صفا يحوي الصف X العنصر x نفسه، ويكون كل عنصرين من نفس الصف متكافئين! أخيراً إذا كان $x \notin X$ فإن z لا يكافئ اي عنصر $y \in X$. وبالتالي هناك احتمالان لا ثالث لهما إذا اعتبرنا صفتين كئيفيين: اما ان يكونا متطابقين واما ان يكونا تقاطعها خالياً.

يمثل الفضاء K اتحاد الصفوف غير المتقاطعة مثنى مثنى X, Y, \dots نرمز لمجموعة هذه الصفوف بـ K/L ، نعرف على المجموعة K/L عمليتين خطيتين على النحو التالي. ليكن X و Y صفتين و α, β عددين؛ نريد تعريف الصف $Z = \alpha X + \beta Y$ نختار لهذا الغرض، بطريقة كيفية عنصرين $x \in X$ و $y \in Y$ ونبحث عن الصف Z الذي يحوي العنصر $z = \alpha x + \beta y$ ، نرمز للصف المطلوب بـ $\alpha X + \beta Y$ يمكن البرهان على ان هذا الصف معرف بطريقة وحيدة وان العمليتين المدخلتين بهذه الطريقة تتمتعان بمسلمات 11. 12. إن صفر الفضاء K/L هو الصف الذي يحوي 0 من الفضاء K وهو بالتالي الفضاء الجزئي L نفسه. اما نظير الصف فهو الصف المؤلف من العناصر

النظيرة لعناصر الصف X . يجد القاريء براهين على كل هذه القضايا في
[84. 2، 14].

يسمى الفضاء K/L الذي انشأناه آنفا فضاء النسبة للفضاء L وفق
الفضاء الجزئي .

ف. تماثلات الفضاءات الشعاعية ليكن X و Y فضاءين شعاعين على نفس
الحقل K . يسمى تطبيق $y = \omega(x)$ من الفضاء X في الفضاء Y تماثلاً (او
مؤثراً خطياً) من الفضاء X في الفضاء Y إذا كانت المساواة التالية محققة من
اجل كل عنصرين x_1, x_2 من الفضاء X ومن اجل كل عددين α_1, α_2
من K :

$$\omega(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \omega(x_1) + \alpha_2 \omega(x_2)$$

إذا كان تماثل ω تطبيقاً من الفضاء X على كل فضاء Y فإننا نقول ان
تماثل غامر. وإن كان ω تطبيقاً ليس بالضرورة غامراً لكنه متباين يسمى ω
تماثلاً متبايناً. يسمى تماثل متباين من الفضاء X على كل الفضاء Y اي تطبيق
متباين وغامر من X على Y يحتفظ بالعمليتين الخطيتين تشاكلاً (طبقا
للتعريف العام لتشاكل البنيات 25. 2). نرمز في معظم الاحيان لتماثل ω بـ:
 $\omega: X \rightarrow Y$.

إذا كان X فضاء جزئياً من فضاء Y فإن التطبيق ω الذي يصل كل عنصر
 $x \in X$ بالعنصر ذاته بصفته عنصراً من Y تماثل متباين $\omega: X \rightarrow Y$ ، اما
التطبيق ω' الذي يصل كل عنصر $x \in Y$ بالصف $Y/X \ni U$ الذي ينتمي
اليه هذه العنصر x فهو تماثل غامر: $\omega': Y \rightarrow Y/X$.

نظرية. إن كل فضاء مجرد ذي n بعداً K_n على حقل K متشاكل مع
الفضاء ذي n بعداً K_n .

البرهان. لتكن f_1, \dots, f_n جلة n شعاعاً مستقلة خطياً من الفضاء K_n .
من اجل $x \in K_n$ ، يوجد تمثيل $x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ وحيد حسب (ج)
نصل الشعاع x بالشعاع $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K_n$. نحصل بذلك

على تقابل $\omega: K_n \rightarrow K_n$ ، يحفظ ، كما هو واضح ، بالعمليتين الخطيتين اي انه تشاكل .

مثال . R_n/R_m (حيث $m < n$) متشاكل مع R_{n-m} .

ق . الجداءات الديكارتيّة . إذا كان X و Y فضاءين شعاعين يمكننا تشكيل جدائهما الديكارتي $P(X, Y)$ (28.2) المؤلف من كل الثنائيات الممكنة (x, y) ، $X \ni x$ و $Y \ni y$. ندخل على الجداء الديكارتي العمليتين الخطيتين « وفق الأحداثيات » :

$$\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2).$$

نتأكد بسهولة من ان المسلمات 11.12 محققة . من البديهي ان الفضاء $P(X, Y)$ يتوي فضاءين جزئيين :

$$X^* = \{(x, y) : y = 0\}, \quad Y^* = \{(x, y) : x = 0\}.$$

متشاكلين (ف) على التوالي مع الفضاءين X و Y . لدينا زيادة على ذلك من اجل كل عنصر $(x, y) \in P(X, Y)$:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

إن التفكيك الاخير للعنصر (x, y) الى حدين متتميان على التوالي لـ X^* و Y^* تفكيك وحيد (حسب تعريف الجمع في $P(X, Y)$ وكذا المساواة بين عناصر $(P(X, Y))$. وهكذا فإن الجداء الديكارتي لفضاءين X و Y هو المجموع المباشر لفضاءيه الجزئيين X^* و Y^* المتشاكلين على التوالي مع X و Y .

51.12 . المؤثرات الخطية

أ . تسمى التماثلات الفضاءات الشعاعية في الاستدلالات التحليلية غالباً المؤثرات الخطية وهكذا فإن مؤثر خطياً من فضاء شعاعي X في فضاء شعاعي Y تطبيق $A: X \rightarrow Y$ يحقق الشرط :

$$A(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_1Ax_1 + \alpha_2Ax_2$$

وذلك من اجل كل x_1 و x_2 في X وكل α_1 و α_2 في K . إذا كان:
 $X = Y$ نقول ان A مؤثر خطي في الفضاء X

ب. إن المؤثر الذي يصل كل شعاع $x \in X$ بالشعاع المنعدم من الفضاء Y هو بطبيعة الحال مؤثر خطي من X في Y يسمى المؤثر المنعدم.

ج. إن المؤثر الذي يصل كل شعاع $x \in X$ بالشعاع نفسه مؤثر خطي في X ؛ يسمى هذا المؤثر مؤثر الوحدة أو المؤثر المطابق ونرمز له بـ E .

د. إن كان الفضاء Y وحيد البعد فإن كل مؤثر خطي A يسمى تابعة خطية. يستعمل هذا الاصطلاح خاصة في الحالة التي يكون فيها X فضاء بعده غير منته؛ اما اذا كان البعد منتهيا فيغلب استعمال مصطلح « التابع الخطي ».

ر. إذا وجد مؤثران خطيان A_1 و A_2 من فضاء X في فضاء Y يمكننا تعريف مجموعها $A_1 + A_2$ وجداء المؤثر A_1 في عدد α حسب القاعدة

$$(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x \quad \text{التالية:}$$

$$(\alpha A_1)x = \alpha(A_1x);$$

ونحصل في الحالتين على مؤثر خطي من X في Y .

س. من اليسير الملاحظة بأن عملية جمع المؤثرات وعملية ضربها في الاعداد تتمتعان بالمسلات 11. 12 التي تحكم عمليتي الفضاء الشعاعي. وهكذا تشكل المجموعة $L(X, Y)$ المؤلفه من كل المؤثرات الخطية من فضاء شعاعي X في فضاء شعاعي Y فضاء شعاعياً. نلاحظ ان صفر الفضاء $L(X, Y)$ هو المؤثر المنعدم (ب).

ص. جداء المؤثرات. إذا كان B مؤثراً خطياً من فضاء X في فضاء Y وكان A مؤثراً خطياً من الفضاء \bar{Y} في فضاء Z (لكل هذه الفضاءات نفس الحقل K) فإن المؤثر $P = A \cdot B$ او باختصار AB معرف كمؤثر من X في Z وفق الدستور:

$$Px \equiv (AB)x = A(Bx)$$

(اي ان المؤثر B يعمل على شعاع $x \in X$ ثم يتلوه المؤثر A الذي يعمل على النتيجة Bx وهو شعاع ينتمي للفضاء Y). إن المؤثر المحصل عليه $P = AB$ مؤثر خطي من X في Z . لدينا العلاقات التالية:

$$\alpha (AB) = (\alpha A) B = A (\alpha B)$$

$$A (B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2,$$

$$(A_1 + A_2) B = A_1 B + A_2 B,$$

$$A (BC) = (AB) C,$$

التي تعبر عن قوانين التجميع والتوزيع الخاصة بضرب المؤثرات يرمز α في هذه العلاقات لعدد كفي من K ؛ اما A, A_1, A_2 فهي مؤثرات من الفضاء Y في الفضاء Z ، و B, B_1, B_2 مؤثرات من الفضاء X في الفضاء Y ، اما طرفا المساواة الاخيرة فهما مؤثران من W في Z . إذا رمزنا بـ E_X (E_Y) لمؤثر الوحدة في الفضاء X (Y) فإن لدينا ايضا المساواة التالية من اجل كل مؤثر B من X من Y :

$$E_Y B = B E_X = B$$

يمكن ضرب المؤثرات في X في بعضها البعض باي ترتيب كان؛ ونحصل بعد هذه العملية على مؤثر في X . لكن هذا الضرب ليس تبديليا عموما حيث نجد باعتبار بعض ثنائيات المؤثرات A, B ان $AB \neq BA$. نبقى في حالة المؤثرات في X ونشير الى اننا نستطيع تعريف قوى مؤثر A في X :

$$A^0 = E_X, A^1 = A, A^2 = A \cdot A, \dots, A^{h+1} = A^h \cdot A, \dots$$

ط. نستطيع ان نصل كل كثير حدود $p(\lambda)$ ذي معاملات منتمية للحقل K :

$$(1) \quad p(\lambda) = \sum_{h=0}^n a_h \lambda^h$$

وكل مؤثر A في الفضاء X « كثير حدود مؤثر »:

$$(2) \quad p(A) = \sum_{h=0}^n a_h A^h$$

وهو مؤثر خطي في الفضاء X ؛ اما مجموع وجداء كثيرات حدود من الشكل (2) فيوافقان مجموع وجداء كثيرات الحدود الموافقة للشكل (1).

ع. ليكن A مؤثرا من فضاء Y في فضاء X و B مؤثرا من X في Y . عندئذ إذا كان $AB = E_X$ فإن المؤثر A يسمى مقلوب المؤثر B من اليسار ويسمى المؤثر B مقلوب المؤثر A من اليمين. إذا عمل المؤثر B في X فقد نجد من بين المؤثرات في X مقلوبا لـ B من اليسار ومقلوبا له من اليمين. إن كان لمؤثر مثل B مقلوب من اليسار A ومقلوب من اليمين C فإن هذين المؤثرين متطابقان:

$$A = AE_X = A(BC) = (AB)C = E_X C = C$$

ينتج من المساواة السابقة ان كل مقلوب من اليسار (من اليمين) في هذه الحالة، للمؤثر B مطابق لـ $C = A$. يسمى هذا المؤثر $A = C$ المعروف بطريقة وحيدة مقلوب المؤثر B ونرمز له بـ B^{-1} .

نشير في حالة الفضاءات ذات الابعاد غير المنتهية انه توجد مؤثرات تقبل مقلوبا من اليسار (وحتى مجموعة غير منتهية من المقلوبات من اليسار المختلفة) ولا تقبل اي مقلوب من اليمين والعكس بالعكس.

ف. ليكن A مؤثرا في فضاء X . نقول عن فضاء جزئيا $X' \subset X$ انه لا متغير بالمؤثر A اذا أدى $X' \ni x$ الى $X' \ni Ax$.

ق. نقول عن شعاع غير منعدم $f \in X$ انه شعاع ذاتي لمؤثر A في الفضاء X إذا كان:

$$Af = \lambda f \quad (\lambda \in K)$$

يسمى العدد λ قيمة ذاتية للمؤثر A ملحقة بالشعاع الذاتي f . من البديهي ان كل شعاع ذاتي f يولد فضاء جزئيا لا متغير وحيد البعد مؤلفا من كل الاشعة αf حيث $\alpha \in K$.

إن كل عبارة خطية لاشعة ذاتية للمؤثر A ملحقة بنفس القيمة الذاتية λ تمثل ايضا شعاعا ذاتيا للمؤثر A الملحقة بنفس القيمة الذاتية λ تشكل فضاء جزئيا في الفضاء X ؛ يسمى هذا الفضاء الفضاء الجزئيا الذاتي للمؤثر A الملحق بالقيمة الذاتية λ .

س. إن الأشعة الذاتية f_1, \dots, f_n للمؤثر A الملحقة على التوالي بالقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مستقلة خطياً. ذلك اننا إذا فرضنا الارتباط الخطي لـ n شعاعاً ذاتياً فإننا نجد $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0$ وبتطبيق المؤثر A وإزالة احد الأشعة يمكننا المرور الى الارتباط الخطي لعدد اصغر من الأشعة الذاتية، يسمح ذلك بتطبيق نفس الاستدلال بالتدرج.

61. 12. امثلة في المؤثرات الخطية في الفضاءات المحسوسة.

أ. لتكن $A = \|a_{jk}\|$ مصفوفة $m \times n$ (أي مصفوفة ذات m سطراً و n عموداً) مؤلفة من عناصر منتمية للحقل K . نختار اساساً e_1, \dots, e_n في فضاء ذي n بعداً K_n و اساساً f_1, \dots, f_m في فضاء ذي m بعداً K_m نصل كل شعاع $K_n \ni x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ بشعاع $K_m \ni y = \sum_{j=1}^m \eta_j f_j$ وفق القاعدة:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k, \quad j=1, \dots, m$$

نحصل بهذه الطريقة على مؤثر خطي من الفضاء K_n في الفضاء K_m في الحالة «المستمر» نلاحظ ان المؤثر:

$$(1) \quad y(s) = Ax(s) = \int_a^b A(s, t) x(t) dt$$

مماثل للمؤثر الوارد في المثال السابق. يرمز $x(t)$ هنا العنصر من الفضاء $R^1(a, b)$ ، اما $A(s, t)$ فهو تابع حقيقي لمتغيرين معرف من اجل $a \leq t \leq b$ ، $c \leq s \leq d$ ، واما $y(s)$ فهو تابع معرف من اجل $c \leq s \leq d$. نتأكد بسهولة من ان التابع $y(s)$ مستمر على $[c, d]$ إن كان التابع $A(s, t)$ كذلك على المستطيل $c \leq s \leq d$ ، $a \leq t \leq b$. يكون المؤثر A في هذه الحالة مؤثراً خطياً من الفضاء $R^1(a, b)$ في الفضاء $R^1(c, d)$.

يسمى المؤثر (1) مؤثر فريدولم **Fredholm** التكاملي. سنتناول بالتفصيل مؤثرات فريدولم ضمن 89. 12.

$$\sum_{j=1}^m \eta_j f_j \equiv Ax = \sum_{k=1}^n \xi_k A e_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^m a_{jk} f_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \right) f_j \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$(2) \quad \eta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \quad (j=1, \dots, m)$$

وبذلك ندرك ان ما قدم في المثال 61.12 - أ هو في الواقع الشكل العام لمؤثر من الفضاء K_n في K_m .

إذا عمل المؤثر الخطي A في K_n فإن $m = n$ وتصبح المصفوفة A مربعة.

إذا طبق المؤثر الخطي A في K_n في K_1 (فضاء وحيد البعد) فإن $m = 1$ وتأخذ المصفوفة A الشكل:

$$A = \| a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \|$$

يعمل المؤثر A في هذه الحالة وفق الدستور:

$$Ax = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k$$

(لم يُصرح هنا باساس الفضاء K_1 ، المؤلف من شعاع واحد) ويمثل تابعا خطياً.

ب. تقابل العمليات المعرفة ضمن 51.12 - ر - س الخاصة بالمؤثرات الخطية عملية ماثلة على المصفوفات، ليكن e_1, \dots, e_n اساسا في فضاء X و

f_1, \dots, f_m اساسا في فضاء Y . إذا كان A_1 و A_2 مؤثرين يطبقان X في Y فإنها موصولان بالمصفوفتين $A_1 = \| a_{ij}^{(1)} \|$ و $A_2 = \| a_{ij}^{(2)} \|$ على التوالي بحيث:

$$A_1 e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(1)} f_i, \quad A_2 e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}^{(2)} f_i \quad (j=1, \dots, n)$$

لدينا من أجل كل α_1 و α_2 في K :

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) e_j = \sum_{i=1}^m (\alpha_1 a_{ij}^{(1)} + \alpha_2 a_{ij}^{(2)}) f_i$$

أي ان المصفوفة $\| \alpha_1 a_{ij}^{(1)} + \alpha_2 a_{ij}^{(2)} \|$ موصولة بالمؤثر الخطي: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$. وهكذا نرى اننا نحصل على المصفوفة الموصولة

بمجموع مؤثرات والمصفوفة الموصولة بجداء مؤثر في عدد بجمع مصفوفات المؤثرات «عنصراً عنصراً» وبضرب مصفوفة المؤثر في العدد المعبر، على التوالي.

ج. ينتج من ذلك أن الفضاء الشعاعي $L(K_n, K_m)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية من فضاء ذي n بعداً K_n في فضاء ذي m بعداً K_m متشاكل مع الفضاء ذي nm بعداً K_{nm} .

د. نشيء المصفوفة الملحقه بجداء مؤثرين. نختار اساساً e_1, \dots, e_n في الفضاء X و f_1, \dots, f_m في الفضاء Y و g_1, \dots, g_m في الفضاء Z . نفرض أن لدينا مؤثراً B من X في Y مصفوفته $m \times n$: $B = \|b_{jk}\|$ بحيث

$$Be_k = \sum_{j=1}^m b_{jk} f_j \quad (k=1, \dots, n)$$

وان لدينا مؤثراً A من Y في Z مصفوفته $q \times m$: $A = \|a_{ij}\|$ بحيث

$$Af_j = \sum_{i=1}^q a_{ij} g_i \quad (j=1, \dots, m)$$

نحصل بخصوص الجداء $P = AB$ على:

$$\begin{aligned} AB e_k &= A(Be_k) = A\left(\sum_{j=1}^m b_{jk} f_j\right) = \sum_{j=1}^m b_{jk} A f_j = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^q b_{jk} a_{ij} g_i = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}\right) g_i \end{aligned}$$

وبالتالي فإن العناصر p_{ik} للمصفوفة P الموافقة للمؤثر $P = AB$ تكتب على الشكل:

$$(3) \quad p_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \quad (i=1, \dots, q, k=1, \dots, n)$$

تسمى المصفوفة $P = \|p_{ik}\|$ المحصل عليها انطلاقاً من المصفوفتين: $A = \|a_{ij}\|$ و $B = \|b_{jk}\|$ حسب الدستور (3) جداء المصفوفة الاولى في الثاني.

يمكننا إذن ضرب مصفوفة $q \times m$ في مصفوفة $m \times n$ ونجد

حاصل الضرب مساويا لمصفوفة $q \times n$.

إذا كان $X = Y = Z$ فإن A و B مصفوفتان مربعتان $n \times n$ والجداء AB هو أيضا مصفوفة مربعة $n \times n$.

ر. ليكن A مؤثرا يعمل في فضاء ذي n بعداً K_n . إذا كنا نعرف المصفوفة $\|a_{jk}\|$ الموافقة للمؤثر A بالنسبة لأساس $\{e\} = (e_1, \dots, e_n)$ فإننا نستطيع إيجاد القيم الذاتية للمؤثر (51.12 - ق) في شكل جذورها المميزة أي جذور المعادلة

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

إذا كان λ_0 جذرا للمعادلة (4) فإننا نستطيع إيجاد احداثيات الشعاع الذاتي الموافق له $f = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ التي تؤلف حلول الجملة التالية المكوّنة من معادلات خطية متجانسة:

$$(5) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda_0) \xi_1 + a_{12} \xi_2 + \dots + a_{1n} \xi_n = 0 \\ a_{21} \xi_1 + (a_{22} - \lambda_0) \xi_2 + \dots + a_{2n} \xi_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \xi_1 + a_{n2} \xi_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_0) \xi_n = 0 \end{cases}$$

تقبل هذه الجملة حلولا غير منعدمة.

س. لنصف بنية مؤثر خطية كفي في فضاء عقدي أو حقيقي K_n * . من أجل كل مؤثر خطي A في فضاء عقدي C_n فإن هذا الفضاء يقبل تفكيكا الى مجموع مباشر من الفضاءات الجزئية اللامتغيرة تكون مصفوفة المؤثر A في كل فضاء من هذه الفضاءات، ضمن اساس مختار

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

اختيارا جيدا، من الشكل.

* انظر [١٤]، الفصل [6]

(« الخانة الجوردانية »). يسمى اساس الفضاء C_n المحصل عليه بضم اسس الفضاءات الجزئية اللا متغيرة، المذكورة اعلاه اساساً جوردانيا للمؤثر A وتسمى مصفوفة المؤثر A بالنسبة لهذا الاساس (وهي مصفوفة شبه قطرية ذات خانات قطرية شكلها الشكل (6)) مصفوفة جوردانية للمؤثر A . إن الاعداد λ وأبعاد الخانات الجوردانية (6) لا متغيرة بواسطة المؤثر A (أي لا تتعلق باختيار الاساس الجورداني)؛ اما الاعداد λ فتمثل جذورا للمعادلة (4) ويمكن ايجاد ابعاد الخانات الجوردانية باعتبار القواسم الاولية للمؤثر A .

من اجل كل مؤثر خطي A في فضاء حقيقي R_n ، فإن هذا الفضاء يقبل تفكيكا الى مجموع مباشر من الفضاءات الجزئية اللامتغيرة تكون مصفوفة المؤثر A في كل فضاء من هذه الفضاءات، ضمن اساس مختار اختياراً جيداً، من الشكل (6) أو من الشكل:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \sigma & \tau & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\tau & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \tau & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau & \sigma & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\tau & \sigma \end{array} \right\|$$

(« الخانة الجوردانية الحقيقية »). يسمى: اساس الفضاء R_n المحصل عليه بضم اسس الفضاءات الجزئية اللامتغيرة، المذكورة اعلاه اساساً جوردانيا حقيقياً للمؤثر A ، وتسمى مصفوفة المؤثر A بالنسبة لهذا الاساس (وهي مصفوفة شبه قطرية ذات خانات قطرية من الشكل (6) و (7)) مصفوفة جوردانية حقيقية للمؤثر A . إن الاعداد λ ، σ ، τ ، وكذا ابعاد الخانات الجوردانية (6) و (7) لا تتعلق باختيار الاساس الجورداني الحقيقي؛ تمثل الاعداد λ و $\sigma + i\tau$ جذورا للمعادلة (4)، يمكننا تعيين ابعاد الخانات الجوردانية (6) و (7) باعتبار القواسم الجوردانية الحقيقية للمؤثر A .

بصفة خاصة، إذا كانت جميع حلول المعادلة (4) بسيطة فإن المصفوفة الجوردانية للمؤثر A في فضاء عقدي C_n تأخذ الشكل (مع العلم أن العناصر غير المكتوبة منعدمة):

$$(8) \quad \left\| \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array} \right\|$$

نلاحظ في حالة فضاء حقيقي أن المعادلة (4) تقبل مع جذرها: $\lambda = \sigma + i\tau$ غير الحقيقي الجذر المرافق $\bar{\lambda} = \sigma - i\tau$ ، إذا كانت جميع الجذور بسيطة ورمزنا لجذور (4) غير الحقيقية بـ: $\sigma_k \pm i\tau_k, \dots, \sigma_1 \pm i\tau_1$ وللجذور الحقيقية بـ: $\lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n$ فإن المصفوفة الجوردانية الحقيقية للمؤثر A تأخذ الشكل:

$$(9) \quad \left\| \begin{array}{c} \sigma_1 \tau_1 \\ -\tau_1 \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_k \tau_k \\ -\tau_k \sigma_k \\ \lambda_{2k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array} \right\|$$

إن المصفوفة الجوردانية، في فضاء عقدي، لكل مؤثر قابل لمصفوفة هيرميتية $(\bar{a}_{jk} = a_{kj}, j, k = 1, \dots, n)$ بالنسبة لأساس تقبل أيضا الشكل القطري؛ وتكون الأعداد λ_j الموافقة لذلك حقيقية، في هذه الحالة. أما في حالة فضاء حقيقي فإن المصفوفة الجوردانية الحقيقية لكل مؤثر قابل لمصفوفة تناظرية $(a_{jk} = a_{kj}, j, k = 1, \dots, n)$ بالنسبة لأساس تقبل، هي الأخرى، الشكل القطري. إن كانت مصفوفة مؤثر A ، ضمن أساس فضاء حقيقي، لا تناظرية $(a_{jk} = -a_{kj}, j, k = 1, \dots, n)$ فإن المصفوفة الجوردانية للمؤثر A تأخذ الشكل (9)، حيث الأعداد: $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n$ منعدمة كلها.

أ. نقول عن فضاء شعاعي U على حقل K انه جبر (على وجه التحديد: جبر على K) إذا عرفنا على العناصر x, y, \dots لـ U عملية ضرب نرمز لها بـ $x \cdot y$ (أو xy) تتمتع بالشروط التالية:

$$(1) \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad \text{من أجل كل } x \text{ و } y \text{ في } U \text{ ومن أجل كل}$$

$$(2) \quad (xy)z = x(yz) \quad \text{مهما كان } x, y, z \text{ في } U .$$

$$(3) \quad (x+y)z = xz + yz \quad \text{مهما كان } x, y, z \text{ في } U .$$

$$(4) \quad x(y+z) = xy + xz \quad \text{مهما كان } x, y, z \text{ في } U .$$

يسمى الشرطان (1) و (2) قانوني التجميع ويسمى الشرطان (3) و (4) قانوني التوزيع.

ب. قد يكون الضرب غير تبديلي أي أن المساواة $xy = yx$ قد تكون غير صحيحة من أجل بعض الثنائيات x, y من U . إن كانت المساواة $xy = yx$ صحيحة من أجل كل ثنائية x, y من U فإننا نقول عن الجبر U إنه تبديلي.

ج. يسمى عنصر $e \in U$ وحدة الجبر U إذا تحققت المساواة $ex = xe = x$ من أجل كل $x \in U$. يسمى عنصر $y \in U$ مقلوب عنصر x إذا تحققت

$$\text{المساواة:} \quad xy = yx = e$$

د. نقول عن فضاء جزئي $V \subset U$ إنه جبر جزئي من الجبر U إذا ادت العلاقتان $x \in V$ و $y \in V$ الى العلاقة $xy \in V$.

ر. نقول عن جبر جزئي $J \subset U$ إنه مثالي من اليسار للجبر U إذا ادت العلاقتان $x \in U$ و $y \in J$ الى العلاقة $xy \in J$ ، ونقول إنه مثالي من اليمين إذا ادت العلاقتان $y \in J$ و $z \in U$ الى $yz \in J$ ، إذا كان جبر جزئي مثاليا من اليسار ومن اليمين فإننا نقول عنه إنه مثالي ثنائي الجانب

أو باختصار مثالي. نلاحظ في الجبر التبادلية انه لا فرق بين مثالي ومثالي من اليسار ومثالي مي اليمين.

يوجد في كل جبر U مثالان خاصان أولهما مكون من عنصر واحد هو العنصر المنعدم ويسمى المثالي المنعدم وثانيهما هو الجبر U نفسه. تسمى المثاليات الاخرى مثاليات ذاتية.

س. نستطيع في فضاء النسبة U/J لجر U على مثالي J منه تعريف، بخصوص الصفوف X, Y, \dots ، ليس فحسب العمليتان الخطيتان (كما ورد في 41.12 - ع) بل أيضا عملية ضرب: من أجل صفتين X و Y ومن أجل عنصرين $x \in X$ و $y \in Y$ مختارين اختياراً كيفياً، نعرف الجداء XY كصف يحوي الجداء xy . يمكن البرهان على أن هذا التعريف سليم (أي أن الصف XY لا يتعلق باختيار العنصرين $x \in X$ و $y \in Y$) وان الفضاء U/J ، بعملية الضرب هذه، هو أيضا جبر. يسمى هذا الجبر جبر نسبة الجبر U على المثالي J . إن كان الجبر U تبديليا فإن الامر كذلك فيها يخص الجبر U/J .

ص. تماثلات الجبور. ليكن U و V جبرين على نفس الحقل K . نقول عن تطبيق $\omega: U \rightarrow V$ إنه تماثل من الجبر U في الجبر V إذا كان تماثلا من الفضاء الشعاعي U في الفضاء الشعاعي V (41.12 - ف) وإذا حقق كل عنصرين x_1, x_2 من الجبر U العلاقة $\omega(x_1 x_2) = \omega(x_1) \cdot \omega(x_2)$ نقول عن تماثل ω إنه تشاكل (تماثل غامر، تماثل متباين) من الجبر U في الجبر V إذا كان تشاكلا (تماثلا غامرا، تماثلا متباينا) من الفضاء U في الفضاء V .

وهكذا فإن التطبيق $\omega: U \rightarrow U/J$ الذي يصل كل عنصر $x \in U$ بالصف $X \in U/J$ الذي يحويه تماثل غامر من الجبر U على الجبر U/J .
ط. من أجل كل تماثل $\omega: U \rightarrow V$ فإن مجموعة العناصر $x \in U$ التي تحقق

$\omega(x) = 0$ تشكل مثالياً J في الجبر U . إن كان ω معطى، نعرف التائل ω من الجبر U/J في الجبر V وهذا بوصل صف $X \in U/J$ بالعنصر $\omega(x) \in V$ ، حيث x عنصر كفي من الصف X . إن هذا التائل متباين. إذا كان التائل ω غامر من الجبر U في الجبر V فإن $\bar{\omega}$ يصبح تشاكلات [14؛ § 2.6].

91. 12. امثلة في الجبور وتمائلاتها.

أ. تشكل المجموعة P المؤلفة من كل كثيرات الحدود (من اية درجة) لـ

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad .\lambda$$

ذات المعاملات المنتمية لحقل K ، باعتبار عمليات الجمع والضرب المعتادة على كثيرات الحدود، تشكل جبراً. إن هذا الجبر تبديلي ويملك وحدة.

ب. تشكل المجموعة $U(G)$ المؤلفة من كل التوابع التحليلية $f(\lambda)$ المعرفة في ساحة G في المستوى العقدي، جبراً عقدياً بعمليات الجمع والضرب المعتادة على التوابع (27.4). إن هذا الجبر تبديلي أيضاً وله وحدة.

يوجد في الجبر $U(G)$ مؤثر يصل كل تابع $f(\lambda) \in U(G)$ بمشتقة $f'(\lambda)$ ؛ وهو بطبيعة الحال خطي؛ نشير بخصوص هذا المؤثر أن دستور لينتيز zinbleL قائم:

$$(1) \quad (f(\lambda) g(\lambda))^{(m)} = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!} f^{(j)}(\lambda) g^{(m-j)}(\lambda)$$

ج. نسمي طيفاً كل مجموعة منتهية من الأعداد $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (المنتمة لحقل K) حيث نلحق كل λ_k بعدد طبيعي r_k ($k=1, \dots, m$) يسمى تضاعف λ_k . نسمي «مُدونة»، ونرمز لها بـ f ، كل مجموعة $r = r_1 + \dots + r_m$ عدداً من الحقل K ، نرمز لهذه الأعداد بـ

$$F(S) \quad \text{اخيراً نرمز بـ} \quad k = 1, \dots, m \quad j = 0, \dots, r_k - 1,$$

لمجموعة كل المدونات على طيف معطى S .

ندخل على $F(S)$ عمليات الجمع والضرب التالية:

$$(f + g)_{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) + g_{(j)}(\lambda_k),$$

$$(\alpha f)_{(j)}(\lambda_k) = \alpha f_{(j)}(\lambda_k),$$

$$(fg)_{(j)}(\lambda_k) = \sum_{i=1}^j \frac{j!}{i!(j-i)!} f_{(i)}(\lambda_k) g_{(j-i)}(\lambda_k)$$

(حيث $k = 1, \dots, m$ ، $j = 0, \dots, r_k - 1$).

فما يخص الدستور الاخير يجب تعويضه في حالة $j = 0$ بـ:

$$(fg)_{(0)}(\lambda_k) = f_{(0)}(\lambda_k) \cdot g_{(0)}(\lambda_k)$$

يصبح بذلك المجموعة $F(S)$ جبرا بعده r على K .

د. ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء عقدي ذي n بعداً C_n . تمثل مجموعة

كل كثيرات الحدود $p(A)$ للمؤثر A (51.12 - ط) المزودة بعمليات

الجمع والضرب المعتادة على المؤثرات، جبرا عقديا نرمز له بـ $P(A)$. إن

هذا الجبر متشاكل مع جبر المدونات $F(S_A)$ (المثال ج)، يرمز S_A

لطيف المؤثر A أي مجموعة كل القيم الذاتية (المختلفة) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

للمؤثر A حيث نلحق بكل قيمة λ_k تضاعفا هو عدد طبيعي r_k يساوي

اكبر بعد من ابعاد الخانات الجوردانية للمؤثر A (71.12 - س) التي لها

العدد λ_k على القطر. يتم هذا التشاكل بطريقة التالية: نصل كل مدونة:

$$f = \{f_{(j)}(\lambda_k), j = 0, \dots, r_k - 1, k = 1, \dots, m\}$$

معرفة على S_A بالمؤثر $f(A)$ الذي له مصفوفة، بالنسبة للأساس

الجورداني للمؤثر A ، ذات بنية شبه قطرية هي بنية لمصفوفة المؤثر A ذاته:

حيث نعوض كل خانة $p \times p$ شبه قطرية للمؤثر A :

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{array} \right\| \quad (p \leq r_k)$$

بالخانة التي لها نفس البعد $p \times p$:

$$(3) \left\| \begin{array}{cccc} f_{(0)}(\lambda_k) & f_{(1)}(\lambda_k) & \frac{1}{2!} f_{(2)}(\lambda_k) & \dots & \frac{1}{(p-1)!} f_{(p-1)}(\lambda_k) \\ 0 & f_{(0)}(\lambda_k) & f_{(1)}(\lambda_k) & \dots & \frac{1}{(p-2)!} f_{(p-2)}(\lambda_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_{(0)}(\lambda_k) \end{array} \right\|$$

إذا امعنا النظر في هذا المؤثر $f(A)$ وجدناه من الشكل $p(A)$

حيث يحقق كثير الحدود $p(\lambda)$ الشروط:

$$p^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) \quad (j=0, \dots, r_k-1, k=1, \dots, m)$$

بجيث ان $p^{(j)}(\lambda)$ هو مشتق كثير الحدود $p(\lambda)$ من الرتبة j

انظر البرهان في [48.6 ؛ 14] .

ر . ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء عقدي ذي n بعداً C_n ، ولتكن :

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ قيمة الذاتية التي نفرضها منتمية كلها لساحة G من

المستوى العقدي . نعتبر التطبيق ω من الجبر $U(G)$ ، المؤلف من التوابع

التحليلية ، في جبر المدونات $F(S_A)$ الذي يصل كل تابع $f(\lambda) \in U(G)$

بمدونة الاعداد

$$(j=0, \dots, r_k-1, k=1, \dots, m) \quad f_{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k)$$

حيث يرمز $f^{(j)}(\lambda)$ لمشتق $f(\lambda)$ من الرتبة j . يبين دستور لينيتز

(1) ان التطبيق ω تماثل من الجبر $U(G)$ في الجبر $F(S_A)$ ؛ نلاحظ ان

هذا التماثل غامر لأننا نستطيع من أجل كل مدونة $\{f_{(j)}(\lambda_k)\}$ ايجاد

تابع $f(\lambda)$ من الجبر $U(G)$ (أو حتى كثير حدود) يحقق

$$(j=0, \dots, r_k-1, k=1, \dots, m) \quad f^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k)$$

بما أن الجبر $F(S_A)$ متشاكل ، بدوره ، مع الجبر $P(A)$ المؤلف من

المؤثرات الخطية (مثال د) فإنه يوجد تماثل غامر من الجبر $U(G)$ على

الجبر $P(A)$ ؛ بمراعاة المثال د ، فإن هذا التماثل لاغامر ينجز كما يلي :

فصل كل تابع $f(\lambda) \in U(G)$ بالمؤثر الخطي $f(A)$ الذي له

مصنوفة ، بالنسبة للأساس الجورداني للمؤثر A ، ذات بنية شبه قطرية هي

بنية مصفوفة المؤثر A نفسه: حيث نعوض كل خانة شبه قطرية (2) بخانة

$$P \times P \text{ البعد} :$$

$$\begin{vmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_k) & \dots & \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\lambda_k) \\ 0 & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \dots & \frac{1}{(p-2)!} f^{(p-2)}(\lambda_k) \\ 0 & 0 & f(\lambda_k) & \dots & \frac{1}{(p-3)!} f^{(p-3)}(\lambda_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_k) \end{vmatrix}$$

وهكذا فإن المؤثرات $e^{\lambda A}$ و $\sin \lambda A$ ، الخ لها دائماً معنى .

بما ان التطبيق $\tilde{\omega} : f(\lambda) \rightarrow f(A)$ تماثل فإن المساواة:

$f(\lambda) \cdot g(\lambda) = h(\lambda)$ ، حيث $g(\lambda)$ ، $h(\lambda)$ ، $f(\lambda)$ تنتمي الى

$U(G)$ ، تستلزم $f(A) \cdot g(A) = h(A)$ لدينا مثلاً المساواة:

$$e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A}$$

س . نقول عن طيف S باعتبار الاعداد $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ عقدية (المثال

ج) إنه تناظري (او متناظر) إن حوى S الى جانب كل:

$\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$ غير حقيقي العدد المرافق $\bar{\lambda}_k = \sigma_k - i\tau_k$ بنفس

التضاعف r_k . نقول عن مدونة $f = \{f_{(j)}(\lambda_k)\}$ على طيف

تناظري S إنها تناظرية إذا كانت كل الاعداد $f_{(j)}(\lambda_k)$ اعدادا

عقدية مرافقة للأعداد المقابلة لها $f_{(j)}(\bar{\lambda}_k)$.

إن مجموعة كل المدونات التناظرية على طيف تناظري S تمثل

(بالعمليات المشار اليها في ج) جبراً حقيقياً نرسم له بـ $F_R(S)$.

ص . ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء حقيقي ذي n بعداً R_n . إن

مجموعة كل كثيرات الحدود الحقيقية للمؤثر A تشكل جبراً حقيقياً

نرسم له بـ $P_R(A)$. نلاحظ ان هذا الجبر متشاكل مع جبر

المدونات التناظرية (س) على طيف المؤثر A (المعتبر في الامتداد

العقدي*) للفضاء الحقيقي R_n ؛ إن هذا الطيف متناظر دوماً . اما

* راجع [14 ، 6 ، 16] .

التشاكل فينجز كما يلي: نصل كل مدونة تناظرية:

$$f = \{f_{(j)}(\lambda_k), j = 0, \dots, r_k - 1, k = 1, \dots, m\}$$

معرفة على S_A بالمؤثر $f(A)$ مصفوفته بالنسبة للأساس الجورداني الحقيقي للمؤثر A لما بنية شبه قطرية هي بنية المصفوفة الجوردانية الحقيقية للمؤثر A ، حيث نعوض كل خانة شبه قطرية ذات الشكل (2) (λ_k) حقيقي (للمؤثر A بخانة من الشكل (3))، كما نعوض كل خانة شبه قطرية من الشكل:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} A_k & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_k & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{vmatrix}$$

(حيث رمزنا بـ A_k ، E ، 0 لمصفوفات من الشكل:

$$A_k = \begin{vmatrix} \sigma_k & \tau_k \\ -\tau_k & \sigma_k \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

بالخانة التالية التي لها نفس البعد:

$$\begin{vmatrix} f_{(0)}(A_k) & f_{(1)}(A_k) & \frac{1}{2!} f_{(2)}(A_k) & \dots & \frac{1}{(p-1)!} f_{(p-1)}(A_k) \\ 0 & f_{(0)}(A_k) & f_{(1)}(A_k) & \dots & \frac{1}{(p-2)!} f_{(p-2)}(A_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_{(0)}(A_k) \end{vmatrix}$$

حيث:

$$f_{(j)}(A_k) = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} f_{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Im} f_{(j)}(\lambda_k) \\ -\operatorname{Im} f_{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Re} f_{(j)}(\lambda_k) \end{vmatrix}$$

يمكن البرهان على أن المؤثر $f(A)$ له الشكل $p(A)$ ، اما معاملات $p(\lambda)$ فهي حقيقية ولدينا الشروط التالية:

$$p^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 1, \dots, r_{k-1}, k = 1, \dots, m)$$

انظر البرهان في [88، 6؛ 14].

ط. ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء حقيقي ذي n بعدا R_n ، نفرض ان

كل القيم الذاتية للمؤثر A ، باعتبارها ضمن الامتداد العقدي C_n للفضاء R_n ، تنتمي الى ساحة G متناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي. إن التمثال ω الوارد في التمثال D يصل كل تابع تحليلي حقيقي $f(\lambda) \in U(G)$ بمدونة تناظرية

$$(j = 0, \dots, r_k - 1, k = 1, \dots, m) \quad f^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k)$$

بما ان الجبر $F_R(S_A)$ المؤلف من كل المدونات التناظرية متشاكل مع الجبر $P_R(A)$ المؤلف من كل كثيرات الحدود الحقيقية للمؤثر A ، فإنه يوجد تماثل غامر من الجبر $U_R(G)$ المؤلف من كل التوابع التحليلية الحقيقية في الجبر $P_R(S_A)$ ؛ ينجز هذا التمثال الغامر ، بمراعاة التمثال V ، بالطريقة التالية: نصل كل تابع $f(\lambda) \in U_R(G)$ بمؤثر خطي $f(A)$ مصفوفته بالنسبة للأساس الجورداني الحقيقي للمؤثر A لها بنية شبه قطرية هي بنية المصفوفة الجوردانية الحقيقية للمؤثر A ، بحيث نعوض كل خانة شبه قطرية من الشكل (2) $(\lambda_k \text{ حقيقي})$ بخانة من الشكل (3) ونعوض ل: خانة من الشكل (4) بخانة من الشكل (5) حيث:

$$f^{(j)}(A_k) = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} f^{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Im} f^{(j)}(\lambda_k) \\ -\operatorname{Im} f^{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Re} f^{(j)}(\lambda_k) \end{vmatrix}$$

ع. يُشكل الفضاء الشعاعي المؤلف من المؤثرات الخطية العاملة في فضاء شعاعي K جبراً (مزوداً بعمليات الجمع والضرب المعتادة على المؤثرات) غير تبديلياً عموماً.

§ 12.2 الفضاءات المترية

12.12. تلعب الفضاءات المترية دوراً هاماً في دروسنا هذه وذلك ابتداء من الفصل الثالث (الجزء الاول). نذكر هنا بمسلمات الفضاء المترية. نقول عن مجموعة M إنها فضاء مترية إذا عرفنا ، من اجل كل عنصرين x, y من عدداً $\rho_M(x, y)$ أو باختصار $\rho(x, y)$ ، يسمى: مسافة x و

y ، تتوفر فيه الشروط التالية:

أ. $\rho(x, y) > 0$ إن كان $x \neq y$ ، $\rho(x, x) = 0$ مهما كان $x \in M$.

ب. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ مهما كان x و y في M .

ج. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ مهما كان x, y, z في

M (مسلمة المثلث).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

نقول عن متتالية x_1, x_2, \dots نقاط من فضاء متري M إنها متقاربة

نحو نقطة $x \in M$ إن كان

22. 12. اعتبرنا في الفصول السابقة كاملة للفضاءات المترية مجموعات من المستقيم العددي ومن المستوى ومن الفضاء المعتاد (الاقليدي) باتخاذ المسافة المعتادة. يجدر التنبيه في هذا الاطار ان هناك مجموعات مختلفة من التوابع، التي يمكن جعلها فضاءات مترية وهذا بتزويدها بمسافة (أي بتابع $\rho(x, y)$) مناسبة.

إن اختيار المسافة في فضاء تابعي يتوقف عن متطلبات المسألة المطروحة. إذا تم اختيار مسافة فإنه من الواضح انه عنصرين يكونان قريبين من بعضهما عندما تكون مسافتها صغيرة. نضطر في معظم الحالات التي نلتقي بها في التحليل الى سلوكه المسلك المعاكس: نرى من خلال معطيات المسألة المعتبرة ما هي العناصر التي من الطبيعي اعتبارها تربية قريبة من بعضها، ومنه تتعين طريقة ادخال المسافة واختيارها.

فمثلاً، إنه من الطبيعي غالباً اعتبار تابعين مستمرين $x(t)$ و $y(t)$ $(a \leq t \leq b)$ قريبين من بعضهما إن كان المقدار $\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$ صغيراً. ولذا يمكن اختيار هذا المقدار بمثابة مسافة $x(t)$ و $y(t)$ ؛ من الواضح ان المسلمات أ - ج محققة، وبالتالي فإن كل مجموعة M مؤلفة من توابع مستمرة على المجال $[a, b]$ ومزودة بالمسافة:

$$(1) \quad \rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

تمثل فضاء مترياً.

كما انه من الطبيعي في بعض الحالات (في حساب التغيرات مثلاً) التي تكون فيها التوابع قابلة للإشتقاق حتى الرتبة m ، اعتبار تابعين $x(t)$ و $y(t)$ قريبين من بعضهما إن كانت قيم التابعين قريبة من بعضها البعض وكذا قيم مشتقات هذين التابعين حتى الرتبة m وذلك مهما كان t . يؤدي بنا هذا الى المسافة:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} \{ |x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \dots, |x^{(m)}(t) - y^{(m)}(t)| \} \quad (2)$$

إذا اعتبرنا مجموعة توابع $x(t)$ تقبل الاشتقاق باستمرار m مرة وزودناها بالمسافة (2) فإننا نحصل بطبيعة الحال على فضاء متري.

هناك حالات أخرى (في نظرية المعادلات التكاملية مثلاً) حيث يكون من الطبيعي اعتبار التابعين $x(t)$ و $y(t)$ قريبين من بعضهما إذا كانتا كذلك بالمفهوم التكاملي أي إذا كان المقدار:

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

صغيراً.

طبيعي عندئذ أن نعرف المسافة بالدستور.

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \quad (3)$$

من الواضح ان مسلمات الفضاء المتري محققة في هذه الحالة ايضاً. نحتاج احياناً الى تعريف مقربة التوابع من بعضها البعض ليس بواسطة تكامل فروق هذه التوابع بل بواسطة قوي لهذه الفروق، مثلاً القوة p ؛ يمكن اعطاء المسافة الموافقة، لذلك بالدستور:

$$\rho(x, y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt} \quad (4)$$

يحقق هذا التعريف من أجل $p \geq 1$ مسلمات الفضاء المتري. مع العلم أن التأكد من المسلمة ج ليس يسيراً (باستثناء الحالتين البسيطتين $p = 1$ و $p = 2$)؛ لن نطيل في هذا الموضوع (راجع التمرين 15).

وهكذا يبدو تعريف الفضاء المترى مرناً بشكل يجعله يستجيب لشتى متطلبات التحليل.

32. 12. فضاء التتابع المستمرة على فضاء مترى.

أ. نرسم للفضاء المترى المؤلف من كل التتابع الحقيقية المستمرة على مجال $a \leq t \leq b$ عند تزويده بالمسافة المعرفة بالدستور 22. 12 (1) $R^s [a, b]$ (كما هو الشأن في 31. 12 - ع حيث ظهر بصفته فضاء شعاعياً).

ب. هل يمكن تعويض المجال $[a, b]$ في هذا التعريف بأي فضاء مترى؟

إن التتابع المستمرة على فضاء مترى كفي M ليست بالضرورة محدودة وعليه فإن الدستور 22. 12 (1) الوارد بشأن المسافة لم يعد صالحاً. إلا أننا لا نستطيع إنشاء فضاء تابعي إلا بالتتابع المستمرة والمحدودة، ولذا يمكن الاحتفاظ بالدستور 22. 12 (1) شريطة استبدال \max بـ \sup . في الختام نعرف الفضاء $R^s(M)$ على أنه الفضاء المؤلف من كل التتابع الحقيقية المستمرة والمحدودة على فضاء مترى M ، المزود بالمسافة.

$$(1) \quad \rho(x, y) = \sup_{t \in M} |x(t) - y(t)|$$

بين التابعين $x(t)$ و $y(t)$.

ج. نعوض هنا، أيضاً، المستقيم العددي (ساحة قيم التتابع المعتبرة بفضاء مترى كفي P ، فنصل إلى الفضاء $P^s(M)$ المؤلف من كل التتابع المستمرة والمحدودة على فضاء مترى M ، قيمها في فضاء مترى P ، نزود

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in M} \rho_M\{x(t), y(t)\} \quad \text{هذا الفضاء بالمسافة:}$$

بين التابعين $x(t)$ و $y(t)$.

ندرس في البنود الموالية من هذه الفقرة بعض المفاهيم العامة لنظرية الفضاءات المترية بالنسبة للفضاء $P^s(M)$ وحالاته الخاصة.

د . ينتج من التعريف (2) أن تقارب متتالية $x_n(t)$ نحو النهاية
 $x(t)$ في الفضاء $P^s(M)$ يكافئ التقارب المنتظم على M
 (39.5) لمتتالية التوابع $x_n(t)$ نحو تابع النهاية $x(t)$.

ر . اتفقنا على تسمية كل مجموعة E في فضاء متري P ، مجموعة كثيفة ايها
 كان بالنسبة لمجموعة $F \subset P$ إن كانت كل نقطة $x \in F$ تنتمي الى E
 أو تساوي نهاية متتالية من E (16.3) . إذا كان لدينا زيادة على ذلك ،
 $E \subset F$ قلنا ان E كثيفة ايها كان في F . نقول عن فضاء متري P إنه
 قابل للفصل إذا وجدت مجموعة قابلة للعد $E \subset P$ كثيفة ايها كان في P .
 لنثبت أن الفضاء $R^s [a, b]$ قابل للفصل .

يمكن ان تكون مجموعة E قابلة للعد وكثيفة ايها كان في $R^s [a, b]$

مؤلفة مثلا من كل التوابع المضلعية التي رؤوسها في النقاط :

$$(a, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (b, y_n)$$

حيث $x_j \in (a, b)$ والاعداد x_j ، y_j ناطقة . نتج قابلية العد لهذه
 المجموعة من 53.2 . لنثبت ان المجموعة E كثيفة في $R^s [a, b]$. ليكن

$f(x) \in R^s [a, b]$ تابعا كيفيا و $\varepsilon > 0$. نبحت نبحت عن

$\delta > 0$ بحيث $|x' - x''| < \delta$ يستلزم $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/5$. لتكن

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ تجزئة للمجال $[a, b]$ بواسطة النقاط الناطقة

x_j ($j = 1, \dots, n-1$) وليكن $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j < \delta$. نفرض

بعد ذلك ان الاعداد الناطقة y_0, y_1, \dots, y_n تحقق

$|y_j - f(x_j)| < \varepsilon/5$ ، $j = 0, 1, \dots, n$. نعتبر تابعا مضلعيأ

$y(x)$ رؤوسه المتوالية (x_j, y_j) . عندئذ $\rho(y, f) < \varepsilon$. ذلك

اننا نستطيع من اجل كل $x \in [a, b]$ إيجاد x_j ($j = 1, \dots, n-1$)

بحيث $|x - x_j| < \delta$ حينئذ $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon/5$

و $|f(x_{j\pm 1}) - f(x_j)| < \varepsilon/5$

ينتج من ذلك :

$$|y_j - y_{j\pm 1}| \leq |y_j - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_{j\pm 1})| + |f(x_{j\pm 1}) - y_{j\pm 1}| < \frac{3}{5} \varepsilon$$

إذن لدينا من اجل $x \in (x_{j-1}, x_{j+1})$ $|y(x) - y_j| < 3\varepsilon/5$. أخيراً :

$$\begin{aligned} |y(x) - f(x)| &\leq |y(x) - y_j| + |y_j - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \\ &< \frac{3}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon, \\ \rho(y, f) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - f(x)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

يمكننا البرهان على أن الفضاء $R^s [0, \infty)$ المؤلف من كل التوابع المحدودة والمستمرة على نصف المستقيم $0 \leq x < \infty$ لا يقبل أي جزء قابل للعد كثيف ايما كان (راجع التمرين 2).

س. نقول عن فضاء متري P إنه تام (17.3 - د) إذا تحقق فيه مقياس كوشي: كل متتالية كوشية x_1, x_2, \dots من P تقبل نهاية في P . نظرية. إن الفضاء $P^s(M)$ المؤلف من كل التوابع المستمرة والمحدودة على فضاء متري M ، ذات القيم في فضاء متري تام P (راجع ج)، فضاء تام.

البرهان. نرمز بـ ρ لمسافة الفضاء P وبـ:

$$\rho(x, y) = \sup_t \rho_P \{x(t), y(t)\}$$

مسافة الفضاء $P^s(M)$.

لتكن $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ متتالية كوشية مؤلفة من توابع هي عناصر من الفضاء $P^s(M)$: من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد N طبيعي بحيث تتحقق المتراجحة التالية من اجل كل $n \geq N, m \geq N$:

$$(3) \quad \rho(x_n, x_m) = \sup_t \rho_P \{x_n(t), x_m(t)\} \leq \varepsilon$$

من ذلك ينتج ان كل متتالية $x_n(t) \in P$ التي نحصل عليها بتثبيت $t = t_0$ متتالية كوشية؛ بما ان الفضاء P تام فإنه توجد قيمة:

$$x(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t_0) \in P$$

إذا رسمت $t = t_0$ كل M فإننا نصل الى تابع النهاية.

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$$

لنجعل $m \rightarrow \infty$ بدون تغيير n في المراجعة:

$$\rho_P \{x_n(t), x_m(t)\} \leq \varepsilon$$

القائمة من اجل كل t و $n \geq N$ ، $m \geq N$ ؛ نحصل عندئذ بفضل 21.5 -
ب، على:

$$(4) \quad \rho_P \{x_n(t), x(t)\} \leq \varepsilon$$

وذلك من اجل كل t وكل $n \geq N$. يعني ذلك ان متتالية، التوابع $x_n(t)$ متقاربة نحو النهاية $x(t)$ بانتظام على M . يتبين من النظريتين 49.5 و 59.5 ان التابع $x(t)$ محدود ومستمر وهو بالتالي عنصر من الفضاء $P^s(M)$ ، يمكن كتابة المراجعة (4) على الشكل:

$$\rho(x_n, x) \leq \varepsilon$$

وهذا يعني أن $X = X(t)$ نهاية لمتتالية العناصر x_n . انتهى البرهان.

42. 12. نظرية آرزيبلا Arzelà. قلنا ان فضاء متريا P متراس (19.3 -
أ) إن كانت كل متتالية من نقاطه x_1, x_2, \dots تحوي متتالية جزئية
متتالية x_{m_1}, x_{m_2}, \dots متقاربة، وشبه متراسة (39.3 - أ) إن كانت كل

متتالية x_1, x_2, \dots تحوي متتالية جزئية لكوشي x_{m_1}, x_{m_2}, \dots .
أ. ليكن Q فضاء متريا متراسا و P فضاء متريا كيفيا و $P^s(Q)$ الفضاء
المتري المؤلف من كل التوابع المستمرة $x = x(t)$ المعرفة على Q والتي
تأخذ قيمها في P المزود بالمسافة 32.12 (2).

$$\rho(x, y) = \sup_t \rho_P \{x(t), y(t)\}.$$

إن الفضاء $P^s(Q)$ ليس عموما متراسا. ما هي الشروط التي تجعل
مجموعة جزئية $E \subset P^s(Q)$ متراسة؟

للإجابة عن هذا السؤال ندخل التعريفين التاليين:

تعريف 1. نقول عن مجموعة E مؤلفة من توابع $x(t) \in P^s(Q)$ بانها
ذات قيم متراسة (شبه متراسة) بانتظام إذا وجدت مجموعة متراسة (شبه
متراسة) $P \supset P_0$ تحوي كل قيم التوابع $x(t)$ من اجل $t \in Q$ ، $E \ni x$.

تعريف 2. نقول عن مجموعة E مؤلفة من توابع $x(t) \in P^s(Q)$ إنها مستوية للاستمرار إذا استطعنا من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد $\delta > 0$ بحيث تؤدي المتراجحة: $\rho_Q(t', t'') < \delta$ الى المتراجحة:

$$\rho_P\{x(t'), x(t'')\} < \varepsilon$$

وذلك مهما كان التابع $x(t) \in E$.

نظرية (آرزيلا). لكي تكون مجموعة $E \subset P^s(Q)$ شبه متراسة يلزم ويكفي ان تكون ذات قيم شبه متراسة بانتظام ومتساوية الاستمرار.

البرهان. نفرض ان $E \subset P^s(Q)$ شبه متراص. بفضل مقياس هوسدورف (39.3 - ج) نستطيع، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد في E شبكة منتهية أي مجموعة منتهية $x_1(t), \dots, x_m(t)$ من التوابع بحيث يمكن من اجل كل $x(t) \in E$ إيجاد رقم k ، $1 \leq k \leq m$ يحقق:

$$(1) \quad \rho_P[x(t), x_k(t)] \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

نبحث من اجل نفس العدد ε عن $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحات:

$$\rho_P[x_k(t'), x_k(t'')] < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k=1, \dots, m).$$

من اجل: $\rho_Q(t', t'') < \delta$. باعتبار نفس العنصرين t' و t'' نجد عندئذ، من اجل كل $x(t) \in E$ ومن اجل $x_k(t)$ الموافقة له، ان:

$$\rho_P[x(t'), x(t'')] \leq \rho_P[x(t'), x_k(t')] + \rho_P[x_k(t'), x_k(t'')] + \rho_P[x_k(t''), x(t'')] < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

أي ان الجماعة E متساوية الاستمرار.

إن المجموعة P_k المؤلفة من كل قيم التابع $x_k(t)$ المستمر على المتراص Q مجموعة متراسة مهما كان $k = 1, \dots, m$ (61.5 - أ). ثم إن الاتحاد R للمجموعات المتراسة P_1, \dots, P_m هي بطبيعة الحال متراسة ايضا. تثبت المتراجحة (1) ان المجموعة R تمثل $\varepsilon/3$ - شبكة للمجموعة

$\bar{P}_0 \subset P$ المؤلف من كل قيم التتابع $x(t) \in E$ على Q . بما أن المجموعة P_0 شبه متراسة بفضل 59.3 فإن E ذات قيم شبه متراسة بانتظام.

وبذلك نرى ان شروط نظرية ارزيبلا ضرورية لشبه تراص E . لنثبت كفاية هذه الشروط.

إن الفضاء $P^*(Q)$ منغمس ايزومترياً في الفضاء $P(Q)$ المؤلف من كل التتابع $x(t)$ المحدودة (مستمرة كانت أو غير مستمرة) على Q والمزود بالمسافة:

$$\rho(x, y) = \sup \rho_P \{x(t), y(t)\}.$$

يتبين من مقياس هو سدورف (39.3 - ج) اننا ننهي برهان النظرية بإنشاء، انطلاقاً من افتراضات النظرية، من اجل كل $0 < \epsilon$ - شبكة منتهية للمجموعة E ، في الفضاء $P(Q)$. نفرض ان $E \subset P^*(Q)$ ذات قيم شبه متراسة بانتظام ومتساوية الاستمرار.

من اجل $0 < \epsilon$ معطى، نبحث عن إيجاد $\delta > 0$ انطلاقاً من شرط تساوي الاستمرار للجماعة E . نغطي بعد ذلك المتراص Q بعدد منته من الكرات اقطارها δ . يمكن الحصول، بازالة النقاط الفائضة، على تغطية المتراص Q بعدد منته من المجموعات، اقطارها $\delta \leq$ ، وغير متقاطعة متنى متنى. نرمز لهذه المجموعات بـ Q_1, \dots, Q_m . لتكن بعد هذا: P_1, \dots, P_k - شبكة منتهية في P لشبه المتراص P_0 الذي يحوي كل قيم التتابع $x(t)$ من اجل $x \in E, t \in Q$. نعتبر المجموعة G المؤلف من التتابع $(t) \in P(Q)$ التي تأخذ على Q_1, \dots, Q_m القيم الثابتة P_1, \dots, P_k . من البديهي ان عدد هذه التتابع منته (لا يتجاوز k^m) وهي من جهة اخرى تشكل ϵ - شبكة للمجموعة E . لرؤية ذلك نعتبر تابعا كيفياً $x_0(t)$ من E . إن تغير هذا التابع على المجموعة Q_j التي لها قطر $\delta \leq$ ، لا يتجاوز $\epsilon/2$ وتوجد نقطة P_j من مجموعة النقاط P_1, \dots, P_m تبعد عن كل قيم $x_0(t)$ ، من اجل $t \in Q_j$ ، بمسافة

لا تتجاوز ε . ثم إن التابع $x(t) \in P(\Omega)$ الذي يأخذ على كل Q القيمة الموافقة له P ينتمي الى G , ولدينا، بطبيعة الحال، في الفضاء

$$\rho(x_0, x) = \sup \rho_P [x_0(t), x(t)] \leq \varepsilon. \quad : P^s(Q)$$

انتهى برهان النظرية.

ب. إذا كان P فضاء تاما فإن الامر كذلك فيما يخص $P^s(M)$ (32. 12). إن ملاصق كل مجموعة شبه متراسة في فضاء تام مجموعة متراسة (69. 3- ب). وبالتالي فإن الاجزاء المتراسة في $P^s(M)$ تتميز في الحالة الراهنة كالتالي:

إنها المجموعات الجزئية المغلقة من $P^s(M)$ ذات القيم المتراسة بانتظام والمتساوية الاستمرار.

ج. في الحالة التي يكون فيها P الفضاء الاقليدي ذي n بعداً R_n ، فإن صف المجموعات شبه المتراسة مطابق لصف المجموعات المحدودة (39. 3 - ب، 49. 3). إذن فمعنى القول ان جماعة E مؤلفة من توابع $x(t) \in R_n^s(M)$ ذات قيم شبه متراسة بانتظام هو، في الحالة المعتبرة، وجود ثابت B يحقق $\sup |x(t)| \leq B$ من اجل كل $t \in M$ و $x(t) \in E$. تسمى مثل هذه الجماعة جماعة توابع محدودة بانتظام. وهكذا ندرك الشكل الذي تأخذه نظرية ارزيلا في الحالة التي يكون فيها $P = R_n$ وهو:

تكون مجموعة E من التوابع $x(t) \in R_n^s(M)$ شبه متراسة إذا وفقط إذا كانت محدودة بانتظام ومتساوية الاستمرار.

د. فيما يخص التوابع العددية على مجال مغلق من المستقيم العددي يمكننا الاشارة الى شرط بسيط يضمن شبه التراص:

نظرية. إذا كانت E مجموعة توابع عددية $x(t)$ مستمرة وقابلة للإشتقاق على مجال $a \leq t \leq b$ ووجد ثابتان a_0, a_1 . بحيث تتحقق

المتراجحتان: $|x(t)| \leq a_0, |x'(t)| \leq a_1$

من اجل كل $x(t) \in E$ ، فإن المجموعة E شبه متراسة في الفضاء $R^s [a, b]$

البرهان . بتطبيق دستور لاغرانج 44.7 نحصل على المتراجحة:

$$|x(t') - x(t'')| \leq \sup |x'(t)| \cdot |t'' - t'| \leq a_1 |t'' - t'|$$

التي تثبت ان الجماعة E متساوية الاستمرار . ثم ننهي البرهان بتطبيق النظرية ج نظرا لكون الجماعة المعترية محدودة بانتظام فرضاً .

52. 12 . فضاء التوابع القابلة للإشتقاق باستمرار m مرة .

أ . نرمز للفضاء المتري المؤلف من كل التوابع الحقيقية $x(t)$ المستمرة والقابلة للإشتقاق باستمرار m مرة على مجال $a \leq t \leq b$ المزود بالمسافة المعرفة بالدستور 22.12 (2) :

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} \{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \dots, |x^{(m)}(t) - y^{(m)}(t)|\}$$

نرمز له بـ $D_m(a, b)$ ؛ بصفة خاصة $D_0(a, b) = R^s(a, b)$ ،

يعني تقارب متتالية $x_n(t)$ نحو النهاية $x(t)$ ، في الفضاء

$D_m(a, b)$ ، تقارب $m + 1$ متتالية :

$$x_n(t) \rightarrow x(t), x'_n(t) \rightarrow x'(t), \dots, x_n^{(m)}(t) \rightarrow x^{(m)}(t).$$

ب . لنثبت ان الفضاء $D_m(a, b)$ تام . لتكن $x_1(t), x_2(t), \dots$

متتالية كوشيه من توابع منتمية للفضاء $D_m(a, b)$. ينتج من المتراجحة:

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n^{(k)}(t) - x_p^{(k)}(t)| \leq \rho(x_n, x_p)$$

ان كل متتالية من المتتاليات:

$$\{x_n(t)\}, \{x'_n(t)\}, \dots, \{x_n^{(m)}(t)\}$$

متتالية كوشيه بالنسبة لمسافة الفضاء $R^s(a, b)$. بما أن الفضاء

متقاربة $R^s(a, b)$ تام (32.12 - س) فإن كل متتالية $x_n^{(k)}(t)$ متقاربة

بانتظام ، لما $n \rightarrow \infty$ نحو تابع مستمر $y_k(t)$ (حيث $k = 0, 1, \dots, m$).

ينتج من النظرية 77.9 حول اشتقاق متتالية متتابع ان لدينا :

$$y_1(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(t) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t))' = y'_0(t),$$

$$y_2(t) = y'_1(t) = y''_0(t), \dots, y_m(t) = y^{(m)}_0(t)$$

وبالتالي فإن التابع $y_0(t)$ ينتمي الى الفضاء $D_m(a, b)$. بالاعتماد

ايضا على التقارب المنتظم لكل متتالية $x_n^{(k)}(t)$ نحو $y_0^{(k)}(t)$ نحو

لما $n \rightarrow \infty$ نلاحظ ان التابع $y_0(t)$ تساوي نهاية المتتالية $x_n(t)$

بالنسبة لمسافة الفضاء $D_m(a, b)$ ، وهو المطلوب .

ج . لنثبت ان الفضاء $D_m(a, b)$ كثيف ايما كان في $R^s(a, b)$

(بالنسبة لمسافة $R^s(a, b)$ ، طبعاً) . بما أن خاصية الكثافة ايما كان

خاصية متعدية (أو انتقالية) (انظر 26.3) يكفي البرهان على أن

$D_m(a, b)$ كثيف ايما كان بالنسبة للمجموعة \leq المؤلفه من التتابع

المضلعية (رأينا في 32.12 - ر أن \leq كثيفة ايما كان في $R^s(a, b)$.

يمكن جعل كل تابع مضلعي $y(x)$ « مرناً » بتعويضه في جوار كل

زاوية بتابع $q(x)$ يقبل الاشتقاق باستمرار m مرة وقيم مشتقاته عند

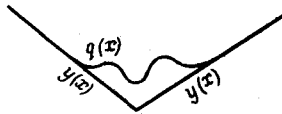
نقاط تماس اضلاع المضلع تساوي قيم المشتقات الموافقة لها للتابع $y(x)$

(الرسم 1.12) . يمكن انشاء مثل هذا التابع $q(x)$ مثلاً في شكل مضلع

درجته $2m$ (راجع 91.12 - د) . باجراء تشابه مركزه يقع في رأس

الزاوية ونسبته صغيرة بكفاية يمكننا الحصول على مسافة بين $q(x)$ و

$y(x)$ صغيرة بالقدر الذي نريد .



الرسم 1.12

62.12 . فضاء التتابع المستمرة المزود بالمسافة التكاملية .

أ . نرمز بـ $L^s(a, b)$ للفضاء المترى المؤلف من كل التتابع المستمرة

الحقيقية $x(t)$ على مجال مغلق $[a, b]$ ، عند تزويده بالمسافة

$$(1) \quad \rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

ونرمز للفضاء المؤلف من نفس التوابع، عند تزويده بالمسافة.

$$(2) \quad \rho(x, y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt} \quad (p > 1)$$

بالرمز. $L_p^s(a, b)$.

كنا اعتبرنا أيضا على فضاء التوابع المستمرة المسافة:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

تولد المسافات السابقة (1)، (2)، (3) انماطا جد مختلفة من

التقاربات وهكذا فإن متتالية التوابع $x_n(t)$ المبينة في الرسم 2. 12 لا تتقارب نحو الصفر في الفضاء $R^s(0, 1)$ في حين انها متقاربة نحو الصفر

في كل فضاء $L_p^s(0, 1)$ لأن:

$$\int_0^1 x_n^p(t) dt = \int_0^{1/n} x_n^p(t) dt \leq \frac{1}{n}.$$

ثم إن متتالية التوابع $y_n(t)$ المبينة في الرسم 3. 12 متقاربة نحو الصفر

في كل فضاء $L_p^s(0, 1)$ بحيث $p < q$ وهي ليست كذلك في

$L_q^s(0, 1)$ لأن:

$$\int_0^1 y_n^p(t) dt = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{n} n^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{p+1} n^{\frac{p}{q}-1} \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{pour } p < q, \\ = \frac{1}{p+1} & \text{pour } p = q. \end{cases}$$

ب. إن الفضاء $L_p^s(a, b)$ ليس تاما وذلك مهما كان $p \geq 1$ للبرهان

على هذه القضية نعتبر متتالية توابع مستمرة $y_\nu(x)$ محصورة بين 0 و 1

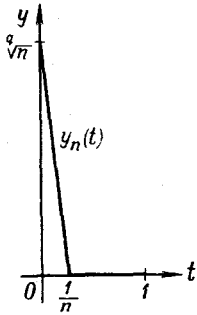
ومتقاربة، لما $\nu \rightarrow \infty$ نحو 0 بانتظام على كل مجال $(a, c - \varepsilon)$ ، ونحو 1

على كل مجال $(c + \varepsilon, b)$ [النقطة c نقطة مثبتة بين a و b]. تحقق

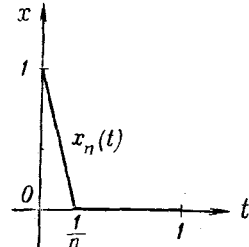
هذه المتتالية مقياس كوشي في الفضاء $L_p^s(a, b)$. ذلك ان لدينا:

$$\int_a^b |y_\nu(x) - y_\mu(x)|^p dx = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

وهذا من اجل v و μ كبيرين. لنثبت أن المتتالية $y_v(x)$ غير متقاربة، وفق مسافة $L_p^s(a, b)$ ، نحو تابع مستمر.



الرسم 3. 12



الرسم 2. 12

نورد في هذا السياق الملاحظة التالية. إذا تقاربت متتالية توابع $f_v(x)$ بالنسبة لمسافة $L_p^s(a, b)$ ، نحو تابع مستمر $f(x)$ على مجال $\Delta = \{a \leq x \leq b\}$ وتقاربت بانتظام على مجال $\delta = \{c \leq x \leq d\}$ داخل Δ نحو تابع $\varphi(x)$ فإن المتطابقة $\varphi(x) \equiv f(x)$ صحيحة في المجال δ . ذلك ان لدينا في الفضاء $L_p^s(c, d)$ العلاقتين:

$$\rho^p(f_v, \varphi) = \int_c^d |f_v(x) - \varphi(x)|^p dx \leq \max_{x \in \delta} |f_v(x) - \varphi(x)|^p (d-c) \rightarrow 0.$$

$$\rho^p(f_v, f) = \int_a^d |f_v(x) - f(x)|^p dx \leq \int_a^b |f_v(x) - f(x)|^p dx \rightarrow 0$$

ومنه يأتي بفضل وحدانية النهاية (3.3 - أ) $f(x) \equiv \varphi(x)$.

إن الفرض القائل ان المتتالية $y_n(x), y_2(x)$ المنشأة اعلاه

متقاربة، بالنسبة لمسافة $L_p^s(a, b)$ ، نحو تابع مستمر $f(x)$ يؤدي حسب ما رأينا، الى $f(x) = 0$ من اجل $a \leq x < c$ و $f(x) = 1$ من اجل $c < x \leq b$. لكن التابع $f(x)$ لا يستطيع، في هذه الحالة ان يكون مستمراً على المجال $a \leq x \leq b$ مهما كانت القيمة $f(c)$.

ج. يقبل الفضاء $L_p^s(a, b)$ ، حسب النظرية العامة 18.3، التتمة $\bar{L}_p^s(a, b)$. من الطبيعي أن نطرح السؤال التالي: هل يمكن اعطاء

عناصر الفضاء $\bar{L}_p^s(a, b)$ ، المعرفة حسب النظرية 18.3 - أ بطريقة مجردة، معنى اقل تجريداً وذلك بتفسيرها، مثلاً، على انها توابع؛ الجواب عن هذا السؤال هو نعم مع الملاحظة أن هذه المسألة ليست بالامر الهين (راجع مثلاً [16]).

§ 12.3. الفضاءات الشعاعية النظمية

13.12. نريد تزويد فضاء شعاع R بمسافة؛ إنه من الطبيعي بهذا الخصوص ان نسلم بأن المسافة والعمليتين الخطيتين مرتبطتان بشكل يجعل إنسحاب نقطتين من نفس الشعاع لا يغير المسافة بينهما. ولذا يكفي تعريف المسافة بين كل نقطة (شعاع) ونقطة مثبتة، الصفر مثلاً. إذن يكفي ان نصل كل نقطة $x \in R$ بعدد، وهو يمثل المسافة بين x و 0 ؛ يسمى هذا العدد نظم الشعاع x .

نقول عن فضاء شعاعي R إنه فضاء حقيقي نظمي إذا تمكنا من ايصال كل شعاع $x \in R$ بعدد $|x|$ (رمز له احيانا بـ $\|x\|$ أو $\| \|x\|$) يسمى نظم الشعاع x يتمتع بالخصائص التالية:

- أ. $|x| > 0$ إن كان $x \neq 0$ ، $|0| = 0$.
- ب. $|\alpha x| = |\alpha| |x|$ من أجل كل $x \in R$ وكل عدد حقيقي α .
- ج. $|x + y| \leq |x| + |y|$ من اجل كل x و y في R (مسلمة المثلث).

نضع تعريفاً $\rho(x, y) = |x - y|$. من السهل اثبات ان مسلمات الفضاء المترى محققة (ترك البرهان للقارئ)؛ ينتج من ذلك أن كل فضاء نظمي فضاء مترى وهكذا نستطيع في فضاء نظمي قياسي المسافات بين الاشعة واستخدام الانتقال الى النهاية: نقول عن فضاء نظمي تام إنه فضاء لباناخ (أو باناخي). نقول عن فضاء شعاعي غير مزود بنظم (أو بمسافة) إنه فضاء تآلفي.

12. 23. أ. إن الفضاء $R^s(M)$ المؤلف من كل الفضاءات الحقيقية $x(t)$ المستمرة والمحددة على فضاء مترى M ، وهو الفضاء الذي اعتبرناه كمثال لفضاء شعاعي (12. 31 - ع) ولفضاء مترى (12. 32 - ب) يمثل في نفس الوقت مصدراً هاماً للفضاءات النظرية. يُعطي نظيم في $R^s(M)$ بالدستور .

$$(1) \|x\| = \sup_t |x(t)|.$$

نرمز هنا لنظيم تابع $x(t)$ بـ $\|x\|$ بدل $|x|$ وذلك لإبداء الفرق بين نظيم التابع $x(t)$ بصفته عنصراً من الفضاء $R^s(M)$ وبين قيمته المطلقة المتعلقة بـ t . إن المسلمات 13. 12 أ - ح التي تعرف النظيم بديهية في هذه الحالة. بصفة خاصة نتأكد من مسلمة المثلث كالتالي:

$$\begin{aligned} |x(t) + y(t)| &\leq |x(t)| + |y(t)| \leq \\ &\leq \sup_t |x(t)| + \sup_t |y(t)| = \|x\| + \|y\|; \end{aligned}$$

ثم نعتبر الحد الاعلى في الطرف الايسر فنحصل على المتراجحة المطلوبة:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ب. نعم الآن المثال a بأن نعوض فيه الحقل R للأعداد الحقيقية بفضاء حقيقي نظيمي كفي R . وهكذا فإن عناصر الفضاء الجديد $R^s(M)$ هي التوابع المستمرة والمحدودة $x(t)$ المعرفة على الفضاء المترى M ذات القيم في الفضاء النظيمي R .

من الضروري ان نثبت بأن العمليتين الخطيتين على مثل هذه التوابع تؤديان الى توابع من نفس النمط. إذا كان التابعان $x(t)$ و $y(t)$ يأخذان قيمهما في R وكان محدودين و:

$$X = \sup_t |x(t)|, \quad Y = \sup_t |y(t)|;$$

فإن التابع: $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ محدود ايضاً من اجل كل α و β حقيقيين لأن

$$\begin{aligned} |\alpha x(t) + \beta y(t)| &\leq |\alpha| |x(t)| + |\beta| |y(t)| \leq \\ &\leq |\alpha| X + |\beta| Y \end{aligned}$$

وهذا من اجل كل t .

لنثبت ان التابع $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ مستمر من اجل $t = t_0$ كما هو الحال بالنسبة للتابعين $x(t)$ و $y(t)$. يمكن افتراض $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$. نثبت عددا $\delta > 0$ ونختار $\delta > 0$ بحيث تؤدي المتراجحة $\rho(t, t_0) < \delta$ الى

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{\epsilon}{2\alpha}, \quad |y(t) - y(t_0)| < \frac{\epsilon}{2\beta}$$

لدينا في هذه الحالة:

$$|z(t) - z(t_0)| \leq |\alpha| |x(t) - x(t_0)| + |\beta| |y(t) - y(t_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

وهذا يثبت استمرار التابع: $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ من اجل $t = t_0$. ندخل في الفضاء $R^s(M)$ النظم بالدستور (1)، حيث يرمز $|x(t)|$ بالطبع للنظم في الفضاء R .

إذن فإننا شيدنا الفضاء $R^s(M)$ المؤلف من كل التوابع $x(t)$ المستمرة والمحدودة على الفضاء المترى M تأخذ قيمها في الفضاء التنظيمي R .

نشير الى ان الفضاء $R^s(M)$ يصبح تاما إن كان الفضاء R كذلك (32. 12 - س)

33. 12. امثلة اخرى في الفضاءات التنظيمية.

أ. نستطيع ادخال نظم على الفضاء المترى $D_m(a, b)$ (52. 12) بوضع:

$$(1) \quad \|x\| = \max \{ |x(t)|, |x'(t)|, \dots, |x^{(m)}(t)| \}.$$

من السهل التأكد من سمسلمات النظم 13. 12 أ - ج.

ب. نستطيع ادخال نظيات على الفضاءات المترية $L_p^s(a, b)$ (62. 12) وذلك بوضع.

$$(2) \quad \|x\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt} \quad (p \geq 1).$$

من السهل التأكد من مسلمات النظم 13.12 أ - ج من اجل $p = 1$ ،
 اما في الحالة العامة ($p > 1$) فإن التأكد من مسلمة المثلث تتطلب بعض
 الصبر (راجع التمرين 15).

ج. تقبل الفضاءات النظيمية $L_p^s(a, b)$ ، $R^s(a, b)$ فضاءات مماثلة
 هامة في حالة البعد المنتهي. ليكن R_n الفضاء ذي n بعداً المؤلف من
 الاشعة (ξ_1, \dots, ξ_n) ندخل عليه النظميات التالية:

$$(3) |x|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|,$$

$$(4) |x|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p} \quad (p > 1),$$

$$(5) |x|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|.$$

من لبديمي ان النظم الاقليدي:

$$(6) |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}$$

الذي نعرفه منذ 86.2 حالة خاصة من النظم $|x|_p$ الموافق لـ $p = 2$.
 إن التنظيمين (3) و (4) مماثلان للتنظيمين التكاملين في الفضاءين
 $L_1^s(a, b)$ و $L_p^s(a, b)$. اما النظم (5) فهو مماثل للنظم 23.12
 (1) في الفضاء $R^s(a, b)$ ؛ إن ما يبرر الرمز $|x|_\infty$ هي العلاقة
 الخاصة بالنهاية:

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p}$$

(راجع التمرين 9 من الفصل 4).

كنا، في الحالة (6)، قد تأكدنا من مسلمات النظم في 86.2. أما في
 الحالتين (3) و (5) فإن ذلك يتم بدون صعوبة تذكروا. تبقى الحالة (4)
 التي لا يعتبر التأكد منها امرا بسيطا (راجع التمرين 17).

خلافاً للنظميات في فضاء تابعي، فإن النظميات (3) - (6) متكافئة من وجهة
 نظر التقارب الذي تولده: لما $m \rightarrow \infty$ ، فإن تقارب متتالية اشعة

$x_m = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$ نحو شعاع $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ من اجل أي تنظيم من النظميات
 (3) - (5) تعني تقارب n متتالية عددية: $\xi_n^{(m)} \rightarrow \xi_n, \dots, \xi_1^{(m)} \rightarrow \xi_1$

سواصل دراسة النظميات في فضاءات ذات ابعاد منتهية في 63.12 .

د . إذا عوضنا في الامثلة السابقة n بـ ∞ فإننا نحصل على مجموعة هامة من الفضاءات ذات الابعاد غير المنتهية. ل نرمز، بصفة خاصة، بـ l_p لمجموعة كل المتتاليات العددية $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ التي تحقق:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty. \text{ نضع } \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} \text{ باستخدام مترابحة}$$

المثلث في النظم $|x|_p$ للفضاء R_n وبوضع $x = \{\xi_k\} \in l_p$ ،
 $y = \{\eta_k\} \in l_p$ يمكن كتابة:

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\xi_k + \eta_k|^p} &\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\eta_k|^p} \leq \\ &\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p} = \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

بالانتقال الى النهاية: $n \rightarrow \infty$ في الطرف الايسر نحصل على تقارب

السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p$ وعلى:

$$\|x + y\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

من البديهي أن $\alpha x = \{\alpha \xi_k\}$ ينتمي الى المجموعة l_p مع

$x = \{\xi_k\}$ وهذا من اجل كل α حقيقي، كما ان

$\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p$ وهكذا فإن المجموعة l_p ، من اجل $p \geq 1$ ،

فضاء شعاعي نظمي. يمكن البرهان على ان الفضاء l_p تام مهما كان

$p \geq 1$ (التمرين 18).

43.12 . إن كل التعاريف وكل النظريات المتعلقة بالفضاءات التآلفية

والفضاءات المترية (الخالية من بنية فضاء شعاعي) صالحة بطبيعة الحال في

الفضاءات الشعاعية التنظيمية. وهكذا يمكن في فضاء شعاعي نظمي اعتبار

مفهوم المجموعة المتوازنة والمجموعة المحدبة الذين يعتبران من اختصاص

نظرية الفضاءات التآلفية.

أ. نقول عن مجموعة E في فضاء شعاعي X إنها متوازنة إذا احتوت النقطة x عند احتوائها النقطة x .

ب. نقول عن مجموعة E في فضاء شعاعي X إنها محدبة إذا احتوت النقاط: $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

عند احتوائها النقطتين x و y ، يعني ذلك هندسيا انها تحوي القطعة المستقيمة ذات الطرفين x و y .

ج. تستعمل النظرية التالية بنية الفضاء الشعاعي وكذا النظم أي أن ميدانها الطبيعي هو الفضاءات الشعاعية التنظيمية.

نظرية. إن كل كرة $S = \{x : |x| \leq \rho\}$ لفضاء شعاعي تنظيمي R مجموعة متوازنة ومحدبة ومغلقة.

البرهان. إذا كان $|x| \leq \rho$ فإن $|x| \leq \rho$ ، وهذا يبين أن الكرة مجموعة متوازنة. اما كونها مغلقة فينتج من 15.3 - ب. بخصوص خاصية التحدب نلاحظ ان مسلمة المثلث تعطي:

$$|\alpha x + \beta y| \leq \alpha |x| + \beta |y| \leq (\alpha + \beta) \rho = \rho.$$

وهذا عندما يكون $|x| \leq \rho$ ، $|y| \leq \rho$ ، $\alpha \geq 0$ ، $\beta \geq 0$ ، $\alpha + \beta = 1$ وهو المطلوب.

د. إن خاصية تحذب كرة الوحدة هامة جدا حتى ان بإمكانها تعويض مسلمة المثلث. لنفرض، بصفة خاصة، اننا ادخلنا في فضاء شعاعي X تابعا عدديا $|x|$ يحقق المسلمتين الاولى والثانية للنظم ووضعنا بدل مسلمة المثلث المسلمة التالية:

الكرة $\{x \in X : |x| \leq 1\}$ مجموعة محدبة.

لنبرهن على أن هذه المسلمة والمسلمتين 13.12 أ، ب تستلزم

مراجعة المثلث 13.12 ج. من كل شعاعين $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ فإن $\frac{x}{|x|}$ و $\frac{y}{|y|}$ ينتميان لكرة الوحدة؛ باستخدام المسلمة الجديدة نرى ان الشعاع $\frac{\alpha x}{|x|} + \frac{\beta y}{|y|}$ ينتمي ايضا لهذه الكرة في حالة $\alpha \geq 0$ ،

$$|\alpha \frac{x}{|x|} + \beta \frac{y}{|y|}| \leq 1. \quad : \alpha + \beta = 1, \quad \beta \geq 0,$$

نضع هنا $x = \frac{|x|}{|x|+|y|}$ ، $\beta = \frac{|y|}{|x|+|y|}$ ؛ باخراج $\frac{1}{|x|+|y|}$ كعامل مشتركة من التنظيم وبضرب المتراجحة في $|x|+|y|$ نحصل على:

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

وهو المطلوب. إن كان احد الشعاعين x ، y منعدما فإن متراجحة المثلث تصبح بديهية.

53.12. النظميات المتكافئة.

أ نقول عن نظيمين $|x|_1$ و $|x|_2$ في نفس الفضاء الشعاعي X إنها متكافئتان (أو هوميومورفيان) إذا كانت المسافتان المولدتان عنهما هوميومورفيتين (43.3) ، اي إذا كان التقارب $x_n \rightarrow x$ وفق احد النظميين يكافئ التقارب $x_n \rightarrow x$ وفق النظم الآخر. وبالتالي فإن كل مجموعة مغلقة (مفتوحة) في X بالنسبة لأحد هذين النظميين مغلقة (مفتوحة) أيضا بالنسبة للنظم الثاني.

ب. لزم ما هي الخاصيات الهندسية للكرتين:

$$S_1(\rho) = \{x \in X : |x|_1 \leq \rho\}$$

$$S_2(\rho) = \{x \in X : |x|_2 \leq \rho\}$$

التي توافق تكافؤ النظميين $|x|_1$ و $|x|_2$. كنا رأينا ان كلا من هذين الكرتين متوازنة ومحدبة ومغلقة بالنسبة للنظم المعبر فيها.

توطئة. إذ تكافأ النظميان $|x|_1$ و $|x|_2$ فإنه يوجد ثابت $c_1 > 0$ بحيث تكون كل كرة $S_1(\rho)$ محتوية الكرة $S_2(c_1\rho)$ ويوجد ثابت

$$c_2 > 0 \text{ بحيث تكون كل كرة } S_2(\rho) \text{ محتوية الكرة } S_1(c_2\rho)$$

وبالعكس، إذا وجد ثابتان c_1 و c_2 يتمتعان بالخاصيتين المذكورتين فإن
النظيمين $|x|_1$ و $|x|_2$ متكافئان.

البرهان. ليكن c_1 و c_2 ثابتين يتمتعان بالخاصيتين المذكورتين. ثم
نفرض ان: $|x - x_n|_1 = \varepsilon_n \rightarrow 0$. عندئذ فإن الكرة

$S_1(\varepsilon_n)$ التي تحوي $S_2(\varepsilon_n/c_2)$ تحوي ايضا العنصر

$x - x_n$. بحيث أن $|x - x_n|_2 \leq \varepsilon_n/c_2$ يعني ذلك ان $|x - x_n|_2 \rightarrow 0$

بطريقة ماثلة ينتج من $|x - x_n|_2 \rightarrow 0$ ان $|x - x_n|_1 \rightarrow 0$.

وبالعكس، نفرض ان النظيمين $|x|_1$ و $|x|_2$ متكافئان لكنه لا
يوجد الثابت المطلوب c_1 . حينئذ نستطيع من اجل $n = 1, 2, \dots$ إيجاد

كرتين $S_1(\rho_n)$ و $S_2(\rho_n/n)$ لا تحوي اولهما الثانية، اي انه توجد

نقطة x_n بحيث $|x_n|_2 < \rho_n/n$ و $|x_n|_1 > \rho_n$. ليكن $y_n = x_n/\rho_n$ ؛ لدينا

$|y_n|_2 < 1/n$ و $|y_n|_1 > 1$ الامر الذي يجعل المتتالية y_n نحو

بالنسبة للنظيم الثاني وهو ليس كذلك فيما يخص النظم الاول. إن هذا

يناقض فرض تكافؤ النظيمين، وبالتالي يوجد ثابت c_1 . كما ان الثابت

c_2 موجود، وهو المطلوب.

ج. نتيجة. يكون نظيمان $|x|_1$ و $|x|_2$ متكافئين إذا وفقط إذا

وجد ثابتان c_1 و c_2 موجبان (تماما) بحيث تتحقق المتراجحة المضاعفة

التالية من اجل كل $x \in X$:

$$c_1 |x|_1 \leq |x|_2 \leq \frac{|x|_1}{c_2}$$

ذلك انه تحققت المتراجحة هذه، ينتج من $|x - x_n|_1 \rightarrow 0$ أن:

$$|x - x_n|_2 \leq \frac{1}{c_2} |x - x_n|_1 \rightarrow 0$$

النظيمين $|x|_1$ و $|x|_2$. لنفرض الآن بأن النظيمين $|x|_1$ و

$|x|_2$ متكافئان عندئذ يتبين من التوطئية ب وجود ثابت c_2 بحيث

تحوي كل كرة $S_2(\rho)$ الكرة $S_1(c_2\rho)$. ليكن $|x|_1 = a$ أي ان

$x \in S_1(a)$. تحوي الكرة $S_2(a/c_2)$ الكرة $S_1(a)$ إذن

د. باستطاعتنا الآن تقديم وصف هندسي لأي نظم $|x|_2$ يكافئ نظما

ثانيا $|x|_1$ معطى .
 نظرية. نفرض ان لدينا، في فضاء نظيمي R مزود بالنظم $|x|_1$ ،
 مجموعة متوازنة ومحدبة ومغلقة S تحوى كرة $S_1(\rho)$ ، وهي نفسها محتواة
 في كرة $S_1(r)$. يوجد عندئذ نظم $|x|_2$ يكافئ النظم $|x|_1$ ويحقق:
 $S_2(1) = S$.

البرهان. نختار شعاعا كفيما $x \neq 0$ ونعتبر نصف المستقيم x/t ،
 $0 < t < \infty$. إن نقاط نصف المستقيم، من اجل t كبير بكفاية، تنتمي
 فرضا للمجموعة S ، اما النقاط التي لها t صغير بكفاية فهي لا تنتمي الى
 S . نضع $|x|_2 = \inf \left\{ t : \frac{x}{t} \in S \right\}$. لنثبت ان هذا
 النظم الجديد يحقق المسلمات 13.12 . ج وكذا الشرط المفروض:

$$\{x : |x|_2 \leq 1\} = S$$

لدينا، من اجل $x \neq 0$ ، $0 < |x|_2 < \infty$ وبذلك يتحقق المسلمة
 الاولى ثم لدينا، من اجل $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} |\alpha x|_2 &= \inf \left\{ t : \frac{\alpha x}{t} \in S \right\} = \inf \left\{ \alpha \frac{t}{\alpha} : \frac{\alpha x}{t} \in S \right\} = \\ &= \alpha \inf \left\{ \tau : \frac{x}{\tau} \in S \right\} = \alpha |x|_2 . \end{aligned}$$

بما ان المجموعة S متوازنة فمن الواضح ان $|x|_2 = |-x|_2$ ؛ ومنه
 $|\alpha x|_2 = |\alpha| |x|_2$ من اجل كل α حقيقي .

لنثبت الآن بأن $S = \{x : |x|_2 \leq 1\}$. إذا كان $x \in S$ فإن لدينا
 بالطبع : $|x|_2 = \inf \left\{ t : \frac{x}{t} \in S \right\} \leq 1$. نلاحظ بعد ذلك ان تحذب
 S يستلزم تحذب المجموعة S_x المؤلفة من نقاط نصف المستقيم x/t المنتمة
 الى S ؛ وبالتالي فإن المجموعة S_x تحوي كل النقاط x/t المحققة لـ
 $t > \inf \left\{ \tau : \frac{x}{\tau} \in S \right\}$ ؛ بما أن S مغلقة فإن النقطة x/t
 المحققة لـ $t = \inf \left\{ \tau : \frac{x}{\tau} \in S \right\}$ تنتمي ايضا الى S . إذن،

إن كان $|x|_2 = \inf \left\{ \tau : \frac{x}{\tau} \in S \right\} \leq 1$ فإن $x = x/1$ ينتمي الى S ، وهو المطلوب .

فما يخص متراجحة المثلث المتعلقة بالنظيم $|x|_2$. وانها تنتج من

$$43.12 \text{ ـد لأن الكرة } \{x: |x|_2 \leq 1\}$$

$|x|_2$ و $|x|_1$. ينتج ذلك من

التوطئة ب ، ذلك أن علاقة الاحتواء : $CS = S_2(1)CS_1(r)$ ينجم عنها :

$S_1(p)CS_2(p)CS_1(r)$ من اجل كل $0 < p$. بما أن فرض التوطئة ب متوفر باعتبار $c_1 = 1/r$ و $c_2 = 1$ ؛ بتطبيق التوطئة نرى أن النظيمين $|x|_2$ و $|x|_1$ و $C_2 = p$ متكافئان .

ر . النظميات في الفضاءات ذات الابعاد المنتهية . لنثبت أن كل النظميات ، في فضاء شعاعي R_n ذي بعد منته ، متكافئة .

بما أن علاقة تكافؤ النظميات علاقة متعدية فإنه يكفي البرهان على أن كل نظيم $|x|_1$ يكافئ النظيم الاقليدي $|x|_2 = \sqrt{\sum_1^n \xi_j^2}$ حيث تمثل الاعداد ξ_1, \dots, ξ_n احداثيات الشعاع x ضمن أساس e_1, \dots, e_n .
نضع $c_1 = \sum_1^n |e_k|_1$ ؛ لدينا من اجل كل $x \in R_n$ المتراجحة :

$$(1) \quad |x|_1 = \left| \sum_1^n \xi_k e_k \right|_1 \leq \sum_1^n |\xi_k| |e_k|_1 \leq |x|_2 \sum_1^n |e_k|_1 \leq c_1 |x|_2 .$$

لنثبت ان هناك أيضا ثابتاً c_2 يحقق المتراجحة :

$$(2) \quad |x|_1 \geq c_2 |x|_2 .$$

مهما كان $x \in R_n$. لبلوغ ذلك نفرض ان العكس صحيح : توجد متتالية

اشعة $(m = 1, 2, \dots)$ تحقق $|x_m|_1 < \frac{1}{m} |x_m|_2$. نضع :

$$y_m = \frac{x_m}{|x_m|_2} = (\eta_1^{(m)}, \dots, \eta_n^{(m)}) \text{ لدينا } |y_m|_2^2 = \sum_1^n (\eta_k^{(m)})^2 = 1$$

ومنه $|\eta_k^{(m)}| \leq 1$ من اجل كل k و m . بما أن الكرة الاقليدية مجموعة

متراصة (69.3 - ر) فإن المتتالية $(y_m (m = 1, 2, \dots))$ تحوي متتالية

جزئية متقاربة ؛ نرمي بالاشعة الفائزة ونغير الترقيم فنتمكن حينئذ من

القول أن المتتالية $y_m = (\eta_1^{(m)}, \dots, \eta_n^{(m)})$ هي نفسها متقاربة نحو شعاع $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. عندئذ نجد، حسب 23.3 - س، أن:

$$(3) \quad \eta_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_1^{(m)}, \dots, \eta_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_n^{(m)}.$$

بالإنتقال إلى النهاية في المساواة $\sum_1^n (\eta_k^{(m)})^2 = 1$ ، يجعل m يسمى

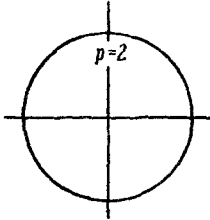
إلى ∞ ، نحصل على $\|y\|_2^2 = \sum_1^n \eta_k^2 = 1$ ، ومنه يأتي $y \neq 0$. نعلم

على (1) ونلاحظ أن $\|y - y_m\|_2 \rightarrow 0$ ، أي أن $y_m \rightarrow y$ من أجل النظم $\|x\|_1$. إلا أن: $\|y_m\|_1 = \frac{\|x_m\|_1}{\|x_m\|_2} \rightarrow 0$ ، ومنه: $y_m \rightarrow 0$. إن ما حصلنا عليه من علاقات يناقض وحدانية النهاية (3.33 - أ). إذن أصبحت المتراجحة (2) مؤكدة.

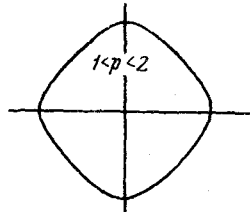
نطبق الآن النتيجة ج لإتمام البرهان على مقولتنا.

بصفة خاصة، وبما أن الفضاء R_n تام بالنسبة للنظم الاقليدي $\|x\|_2$

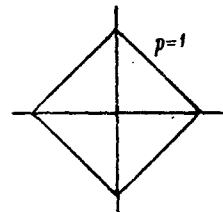
(27.3 - ج) فإنه كذلك بالنسبة لأي نظم آخر $\|x\|_p$.



الرسم 6. 12



الرسم 5. 12



الرسم 4. 12

س. لدينا ما يلي كنتيجة لما توصلنا إليه:

إن التقارب بالنسبة لأي نظم في فضاء ذي بعد منته R_n يكافئ

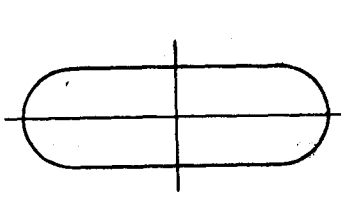
التقارب بالنسبة للاحداثيات.

تبين الرسوم 4. 12 - 8. 12 كرات الوحدة الخاصة بالنظيمات $\|x\|_\infty$ ،

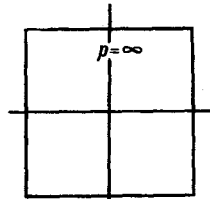
$\|x\|_1$ ، $\|x\|_p$ المعبرة كاملة في 33. 12، من أجل $n = 2$. أما الرسم

9. 12 فهو خاص بنظم من نمط آخر. انظر التمرين 20 بخصوص الحالة

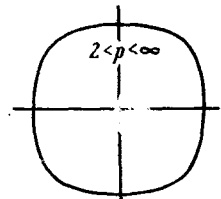
$$. p < 1$$



الرسم 9. 12



الرسم 8. 12



الرسم 7. 12

63. 12. إن الكرة $|x| \leq 1$ متراسة في فضاء اقليدي بعده n (69. 3 - ر). نلاحظ ان الكرة $\|x\| \leq 1$ متراسة دوما في كل فضاء نظيمي بعده n . إذ ان كل نظيم يكافيء، حسب 53. 12 - د، النظيم الاقليدي. هل توجد فضاءات نظيمية ذات ابعاد غير منتهية تكون فيها كرة الوحدة $\|x\| \leq 1$ متراسة؟ إن الجواب عن هذا السؤال هو لا؛ فالتارص إذن خاصية مميزة للفضاءات ذات الابعاد المنتهية.

أ. توطئة. ليكن E فضاء جزئيا مغلقا من فضاء شعاعي نظيمي R بحيث $E \neq R$ يوجد شعاع $y \in R$ بحيث $|y| = 1$ و $|y - x| \geq 1/2$ من اجل كل العناصر $x \in E$.

البرهان. نختار $y_0 \in R - E$ ؛ ليكن $d = \inf |y_0 - x|$ من اجل $x \in E$. لو كان $\inf |y_0 - x| = 0$ لوجدت متتالية $x_n \in E$ تؤول الى y_0 ؛ وبما ان E مغلق، فإننا نجد حينئذ $y_0 = \lim x_n \in E$ وهذا يناقض الفرض. وبالتالي فإن $d > 0$. نبحت عن شعاع $x_0 \in E$ بحيث $|y_0 - x_0| < 2d$. نضع $y = \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|}$ لدينا $|y| = 1$ ؛ زيادة على ذلك $x_0 + x|y_0 - x_0| \in E$ مها كان $x \in E$ و:

$$|y - x| = \left| \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|} - x \right| = \left| \frac{y_0 - x_0 - x|y_0 - x_0|}{|y_0 - x_0|} \right| \geq \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

وهو المطلوب.

ب. نظرية (ف. ريس F. Riesz) إن كرة الوحدة في فضاء نظيمي R ذي بعد غير منته ليست مجموعة شبه متراسة.

البرهان. ننشئ في كرة الوحدة للفضاء R متتالية

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ من الاشعة البعيدة عن بعضها البعض بمسافة

$> 1/2$. بما ان مثل هذه المتتالية لا تقبل بطبيعة الحالة، اية متتالية جزئية

كوشية فإن الكرة $S = \{x: |x| \leq 1\}$ ليست مجموعة شبه متراسة. نختار

x_1 أي شعاع $x_1 \in S$ بحيث $|x_1| = 1$. تشكل المضاعفات λx_1 لهذا

الشعاع فضاء شعاعيا جزئيا مغلقا. $E_1 \subset R$ يوجد حسب التوطئة أ شعاع

$x_2 \in S$ ، بحيث $|x_2| = 1$ و $|x_2 - x_1| > 1/2$ من اجل كل $x \in E_1$ ؛ لدينا

بصفة خاصة $|x_2 - x_1| > 1/2$ تشكل العبارات الخطية $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

فضاء جزئية مغلقا. $E_2 \subset R$ يوجد، حسب التوطئة أ، شعاع $x_3 \in S$ ،

بحيث $|x_3| = 1$ و $|x_3 - x_1| > 1/2$ من اجل كل $x \in E_2$ ؛ بصفة خاصة:

$$|x_3 - x_2| > 1/2, \quad |x_3 - x_1| > 1/2,$$

بمواصلة هذه العملية نحصل على متتالية

$E_1 \subset E_2 \subset \dots$ من الفضاءات الجزئية ذات الابعاد المنتهية يمثل كل

واحد منها جزءا ذاتية من R (نظرا لكون هذا الاخير ذا بعد غير منته)،

وعلى متتالية: x_1, x_2, \dots من الاشعة بحيث $|x_m - x_n| > 1/2$. كنا

اشرنا في بداية البرهان الى أن ذلك يحل المسألة المطروحة.

73. 42. سلاسل الاشعة في فضاء نظيمي. يمكن في فضاء متري اعتبار

المتتاليات المتقاربة، لكن مفهوم السلسلة المتقاربة ليس له معنى. أما في

فضاء شعاعي نظيمي فإن مفهوم سلسلة اشعة متقاربة له معنى.

أ. لتكن السلسلة التالية المؤلفة من عناصر من فضاء نظيمي R.

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

نقول عن السلسلة (1) إنها متقاربة في R إذا كانت المتتالية

$s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, \dots$ وهي متتالية المجاميع الجزئية، متقاربة في

R؛ تكون في هذه الحالة النهاية $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ للمجاميع الجزئية، تعريفا،

مجموع السلسلة (1). إذا لم تكن متتالية المجاميع الجزئية s_n غير متقاربة

قلنا ان السلسلة (1) متباعدة في R ولا يكون لها في هذه الحالة أي مجموع.

لكي تتقارب السلسلة (1) يلزم، ويكفي إن كان الفضاء R تاما، ان يتحقق مقياس كوشي: من اجل كل $\varepsilon > 0$ يوزد عدد N طبيعي بحيث:

$$(2) \quad |s_n - s_m| = |x_{m+1} + \dots + x_n| < \varepsilon$$

وهذا مهما كان $m > N$ و $n > m$.

ب. إذا تقاربت السلسلة العددية المؤلفة من نظيات الاشعة x_n ، فإن السلسلة (1) متقاربة ايضا في حالة فضاء R قام، لأن.

$$|x_{m+1} + \dots + x_n| \leq |x_{m+1}| + \dots + |x_n|,$$

ويمكننا تطبيق مقياس كوشي.

ج. مقياس فايرشتراس (Weierstrass) تكون السلسلة (1) متقاربة إذا تحققت المتراجحات $|x_n| \leq \alpha_n$ ، المتعلقة بالنظيات، من اجل كل n (ابتداء من رقم كفي) وكانت السلسلة العددية $\sum_1^{\infty} \alpha_n$ متقاربة. ذلك ان الفرض يؤدي الى تقارب السلسلة $\sum_1^{\infty} |x_n|$ مع السلسلة $\sum_1^{\infty} \alpha_n$ حسب مقياس المقارنة.

د. مقياس كوشي. تكون السلسلة (1) متقاربة إذا كان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1, \text{ ومتباعدة اذا كان } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1. \text{ يتم}$$

البرهان كما تم في 41.6 ب بخصوص سلسلة عددية.

ر. مقياس آبل - ديركليت (Abel - Dirichlet) تكون السلسلة:

$$(3) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + \dots,$$

حيث x_1, x_2, \dots اشعة من الفضاء R و a_1, a_2, \dots اعداد حقيقية متقاربة في R إذا آلت الاعداد a_n الى الصفر وكانت هذه المتتالية متناقصة وكانت: $s_n = x_1 + \dots + x_n$ محدودة (بالتنظيم) بعدد مثبت.

طريقة البرهان هي الواردة في 74.6 بعد تعويض الطويلات بالنظميات

س. مثال نعتبر السلسلتين:

$$(4) \quad \sum_0^{\infty} a_n \cos nt,$$

$$(5) \quad \sum_1^{\infty} b_n \sin nt$$

في الفضاء $R^s(a, b)$. نذكر أن $R^s(a, b)$ فضاء تام (32.12 - س) وان التقارب بالنظيم في الفضاء $R^s(a, b)$ هو التقارب المنتظم على المجال $[a, b]$. ان نظيمات التوابع $\cos nt$ و $\sin nt$ في الفضاء $R^s(a, b)$ لا تتجاوز 1. إذن إذا كان $\sum |a_n| < \infty$ أو $\sum |b_n| < \infty$ فإن السلسلة (4) و (5) على التوالي متقاربة بانتظام في الفضاء $R^s(a, b)$ (حسب مقياس فايرشتراس) اي انها متقاربة بانتظام على $[a, b]$ مهما كان a و b . في حالة تباعد السلسلة المؤلفة من الاعداد a_n أو الاعداد b_n ، وشريطة أن يكون $a_n \neq 0$ (أو: $b_n \neq 0$) يمكننا استخدام مقياس آبل - ديركليت. لدينا فيما يخص مجاميع التابع الجيبي او جيب التمام (9)74.6:

$$(6) \quad \left| \sum_{m=0}^n \frac{\cos mt}{\sin mt} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{1 - \cos t}}.$$

إذا تغير t في المجال $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ ، حيث $\varepsilon > 0$ ، فإن الطرف الايمن من المتراجحة (6) محدود ويمكننا الانتقال في الطرف الايسر الى القيمة العظمى:

$$\max \left| \sum_0^n \frac{\cos mt}{\sin mt} \right| = \left\| \sum_0^n \frac{\cos mt}{\sin mt} \right\| \leq \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \varepsilon}}.$$

يضمن ذلك قابلية تطبيق مقياس آبل - ديركليت في الفضاء $R^s(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. وهكذا فإن السلسلتين (4) و (5)، ضمن الفرض $a_n \searrow 0$ و $b_n \searrow 0$ ، متقاربتان بانتظام على كل مجال $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. قد تكون السلسلتان غير متقاربتين بانتظام على المجال $[0, 2\pi]$ (على الرغم من تقارب التوابع الجيبية عند كل نقطة) سنرى اسفله ان:

$$(7) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt = \begin{cases} 0 & \text{pour } t=0 \text{ et } t=2\pi, \\ \frac{\pi-t}{2} & \text{pour } 0 < t < 2\pi, \end{cases}$$

$$(8) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt = -\ln 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \quad (0 < t < 2\pi).$$

إذا تقاربت السلسلة (7) بانتظام على $[0, 2\pi]$ ، أي بالنسبة لتنظيم الفضاء $R^3(0, 2\pi)$ فإن مجموعها $s(t)$ ينتمي إلى هذا الفضاء وبالتالي يصبح تابعاً مستمراً على $[0, 2\pi]$. إلا أننا نرى من خلال (7) أن التابع $s(t)$ متقطع عند النقطتين 0 و 2π ، وبالتالي فإنه ليس هناك تقارب منتظم لـ (7) على المجال $[0, 2\pi]$.

إن مجموع السلسلة (8) غير محدود في $[0, 2\pi]$ وبالتالي فإن هذه الأخيرة لا تتقارب بانتظام، أيضاً، على $[0, 2\pi]$.
ليس هناك تقارب منتظم للسلسلتين (7) و (8) على المجال المفتوح $(0, 2\pi)$.

83. 12. تتمة فضاء نظيمي. كما هو الشأن بالنسبة للفضاءات المترية فإن الفضاءات التنظيمية قد تكون تامة أو غير تامة إذا كان لدينا فضاء نظيمي R غير تامة فإننا نستطيع تميمه بإيجاد فضاء مترى تام \bar{R} يحوي R (§ 3.8) زيادة على ذلك، فإن تتمة فضاء نظيمي فضاء ليس مترياً فحسب بل نظيمياً أيضاً: ندخل على التتمة العمليتين الخطيتين ونتأكد من مسلمات الفضاء النظيمي.

كما عرفنا عنصر X من تتمة فضاء مترى R كرمز موافق لصف مؤلف من متتالية كوشية متحدة النهاية في الفضاء R . ليكن الآن فضاء نظيمياً عندئذ إذا جمعنا حداً حداً عناصر متتاليتين كوشيتين $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ و $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ نحصل على متتالية:

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots,$$

هي متتالية كوشية لأن

$$\| (x_n + y_n) - (x_m + y_m) \| \leq \| x_n - x_m \| + \| y_n - y_m \|.$$

إذا عوضنا هنا المتتالية $\{x_n\}$ بمتتالية متحدة النهاية $\{x'_n\}$ والمتتالية $\{y_n\}$ بمتتالية متحدة النهاية $\{y'_n\}$ نحصل على متتالية مجاميع

$\{x'_n + y'_n\}$ متحدة النهاية مع المتتالية $\{x_n + y_n\}$ لأن:

$$\| (x'_n + y'_n) - (x_n + y_n) \| \leq \| x'_n - x_n \| + \| y'_n - y_n \|.$$

يسمح ذلك بتعريف جمع عناصر الفضاء \bar{R} .

نختار في صف X متتالية كوشية $\{x_n\}$ وفي صف Y متتالية كوشية $\{y_n\}$ ؛ نعرف مجموع X و Y على أنه الصف الذي يحوي متتالية كوشي $\{x_n + y_n\}$.

تؤكد الاستدلالات السابقة، بصفة خاصة، على ان نتيجة الجمع لا تتعلق باختيار المتتاليتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ في الصفين X و Y على التوالي. نعرف بطريقة مماثلة جداء صف X في عدد λ كما يلي: نختار متتالية كوشية $\{x_n\}$ في الصف X ونعرف الجداء λX على انه الصف الذي يحوي المتتالية الكوشية $\{\lambda x_n\}$. نترك للقارئ مهمة اثبات سلامة هذا التعريف.

من السهل التأكد من المسلمات 11.12 الخاصة بالفضاء الشعاعي؛ يتبين من التعريف نفسه أن العمليتين الخطيتين على الصفوف تردان الى لعمليتين الموافقتين لها على عناصر الفضاء الاول. بصفة خاصة يتألف الصف 0 من كل المتتاليات المتقاربة نحو 0 في الفضاء R .

يبقى ان ندخل نظماً في الفضاء \bar{R} وان نتأكد من المسلمات 13.12 أ - ج نعرف نظم صف X بالدستور:

$$\| X \| = \rho(X, 0),$$

حيث يرمز أ للمسافة في الفضاء المترى التتمة \bar{R} (3.28(1)). بعبارة اخرى لدينا: $\| X_n \| = \lim \rho(x_n, 0)$ حيث x_n متتالية كوشية من الصف X . إذا كان $\| X \| = 0$ فإن $\lim \| x_n \| = 0$ اي ان المتتالية $\{x_n\}$ متحدة النهاية مع المتتالية $\{0, 0, \dots\}$ التي تعرف الصف 0؛ إذن $X = 0$ وبذلك تأكدنا من المسلمة 13.12 - أ. بعد تثبيت متتاليتين كوشيتين $\{x_n\}$ و

$\{y_n\}$ ، في الصنفين X و Y ، على التوالي. نختار في الصنف $X + Y$ المتتالية الكوشية $\{x_n + y_n\}$. بما أن: $\|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\|$ فإن:

$$\|X + Y\| = \lim \|x_n + y_n\| \leq \lim \|x_n\| + \lim \|y_n\| = \|X\| + \|Y\|,$$

وبذلك نتأكد من المسلمة 13.12 - ج لدينا بطريقة مماثلة:
 $\|\lambda X\| = \lim \|\lambda x_n\| = |\lambda| \lim \|x_n\| = |\lambda| \|X\|$,
 وبذلك نتأكد أيضا من المسلمة 13.12 - ب. انتهيا من البرهان على مقولتنا.

93.12. الفضاءات الشعاعية العقدية التنظيمية.

أ. اعتبرنا في 13.12-12-83 الفضاءات الحقيقية التنظيمية إنه ليس من الصعب ادخال مفهوم فضاء تنظيمي على حقل الاعداد العقدية (*). ان مثل هذا الفضاء هو تعريفا فضاء شعاعي عقدي C يسمى فضاء عقديا تنظيميا إذا وصلنا كل شعاع $x \in C$ بعدد غير سالب $|x|$ ، وهو نظم الشعاع x ، يحقق الشروط التالية:

$$(1) \quad |x| > 0 \text{ إن كان } x \neq 0, \text{ و } |0| = 0,$$

$$(2) \quad |\alpha x| = |\alpha| |x| \text{ من اجل كل } x \in C \text{ ومن اجل كل } \alpha \text{ عقدي.}$$

$$(3) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \text{ من اجل } x \text{ و } y \text{ في } C \text{ (مسلمة المثلث).}$$

بما ان الضرب في كل الاعداد العقدية جائز في فضاء عقدي فإن كل فضاء تنظيمي عقدي هو في آن واحد فضاء تنظيمي حقيقي. وبالتالي نستطيع تمديد صلاحية خاصيات الفضاءات الحقيقية التنظيمية، مباشرة او بشكل فيه تغير طفيف الى الفضاءات العقدية التنظيمية. بصفة خاصة فإن فضاء تنظيميا عقديا، مثل الحالة الحقيقية، فضاء متري مزوداً بالمسافة المعرفة بالدستور $\rho(x, y) = |\bar{x} - y|$.

ب. إن الفضاء المؤلف من كل التوابع $x(t)$ ذات القيم العقدية المحدودة

* لا يمكن تعميم التعريف التي حالة فضاء شعاعي على حقل كيني K لأن القيمة المطلقة $|a|$ غير معرفة من اجل العناصر a في حقل كيني K .

والمستمرة على فضاء متري M , المزود بالنظم:

$$\|x\| = \sup_t |x(t)|,$$

فضاء عقدي نظيمي؛ نرسم له بـ $C^0(M)$. إن هذا الفضاء تام (32.12 - س).

ج. يمثل الفضاء المؤلف من التتابع $x(t)$ العقدية المستمرة على مجال $[a, b]$ المزود بالنظم:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt},$$

فضاء عقدي نظيمي؛ نرسم له بـ $CL_p^0(a, b)$ (أو باختصار بـ: $L_p^0(a, b)$ كما هو الحال فيما يخص التتابع الحقيقية إذا استحال وجود أي التباس).

د. إن الفضاء المؤلف من كل التتابع $x(t)$ المستمرة والمحدودة على فضاء متري M , قيمها في فضاء عقدي نظيمي C , المزود بالنظم:

$$\|x\| = \sup_t |x(t)|$$

(حيث يرمز $|x(t)|$ للنظم في الفضاء C)، يمثل فضاء عقديا نظيميا؛ نرسم له بـ $C^0(M)$. إنه تام إن كان C كذلك (32.12 - س).

ر. بعد اجراء تغيير طفيف تصبح امثلة الفضاءات الحقيقية النظيمية ذات الابعاد المنتهية الواردة ضمن 32.12 - ج امثلة مماثلة لفضاءات عقدية نظيمية ذات ابعاد نهية: يكفي تعويض الشعاع الحقيقي (ξ_1, \dots, ξ_n) بالشعاع العقدي (أي اعتبار الاحداثيات ξ_1, \dots, ξ_n كأعداد عقدية) وكتابة في الدستورين (6) و (4) $|\xi_k|^2$ و $|\xi_k|^p$ بدل ξ_k^2 و ξ_k^p بنفس الطريقة نحصل على الفضاءات العقدية المماثلة لـ L_p ذات الابعاد غير المنتهية (33.12 - د).

س. نقول عن مجموعة E في فضاء عقدي نظيمي C إنه محدبة مطلقا إذا احتوت كل النقاط ذات الشكل $\alpha x + \beta y$ حيث α و β عقديان

يحقان $|a|+|b| \leq 1$ ، عند احتوائها النقطتين x و y . إن كل كرة $\{x \in C: |x - x_0| \leq \rho\}$ في فضاء عقدي نظيمي مجموعة محدبة مطلقاً .

ص . تبقى شروط تكافؤ للنظيمات في فضاء حقيقي نظيمي (53.12 أ - س) قائمة بخصوص النظيمات في فضاء عقدي . بصفة خاصة . إن كل نظيمين في فضاء عقدي بعده منته متكافئان ، كما ان التقارب بالنسبة لواحد منهما هو التقارب بالنسبة للإحداثيات . إن كل الفضاءات العقدية التنظيمية ذات الابعاد المنتهية فضاءات تامة كما هو الحال فيما يخص الفضاءات الحقيقية .

ط . بعد البرهان فيما يتعلق بالفضاءات الحقيقية ، على نظرية ريس حول عدم تراص الكرات في فضاء نظيمي ذي بعد غير منته يصبح البرهان على نفس النظرية في الحالة العقدية امراً مقتضياً .

ع . ان كل نظرية تقارب سلاسل الاشعة في فضاء نظيمي الواردة في 73.12 بخصوص فضاء حقيقي تمتد ، بدون اي تغيير ، الى حالة فضاء عقدي نشير هنا الى مثال مميز . لتكن سلسلة القوى :

$$\sum_0^{\infty} a_k (z - z_0)^k ,$$

حيث z و z_0 عددان عقديان والمعاملات a_k عناصر من فضاء عقدي نظيمي وتام C . إن هذه السلسلة متقاربة داخل القرص ذي نصف القطر :

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$$

المتركزة في النقطة z_0 ، ومتباعدة خارج هذا القرص . تثبت هذه النتيجة مثل دستور كوشي - هادامار الوارد في 26.6 ، بتطبيق مقياس كوشي 73.12 - د .

ف . إن التتمة \bar{C} لفضاء عقدي نظيمي C تنشأ كما هو وارد في الفضاءات الحقيقية (83.12) وتمثل فضاء عقدياً تنظيمياً تاماً .

§ 4.12 . الفضاءات الهيلبرتية .

14.12 . نستطيع في فضاء نظيمي قياس المسافات ولا يمكننا قياس الزوايا الامر الذي يضيق امكانيات التفسير الهندسي . لدينا، تعريفاً، في فضاء هيلبرتي جداء سلمي للاشعة يمكننا من التعبير عن اطوال الاشعة وكذا الزوايا التي تشكلها . هاهو التعريف المضبوط للجداء السلمي: نقول عن فضاء شعاعي حقيقي H إنه فضاء هيلبرتي اذا عرفنا من اجل كل شعاعين كفيين x و y من H عدداً حقيقياً (x, y) يسمى الجداء السلمي للشعاعين x و y ، يتمتع بالخاصيات التالية:

أ . $(x, x) > 0$ إذا كان $x \neq 0$ ، $(0, 0) = 0$.

ب . $(y, x) = (x, y)$ مهما كان x و y في H .

ج . $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ مهما كان x و y في H والعدد الحقيقي α .

د . $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ مهما كان x, y, z في H .

يأتي من المسلمات ب - د الدستور العام (بالتدرج) التالي:

$$(1) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^n \beta_k y_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k (x_j, y_k).$$

إن المسلمات السابقة متعلقة بالفضاءات الهيلبرتية الحقيقية؛ سنقدم اسفله المسلمات المتعلقة بالفضاءات الهيلبرتية العقدية (44.12).

24.12 . أمثلة .

أ . إن الفضاء الاقليدي ذي n بعداً R_n الذي ادخل ضمن 86.2 بالجداء السلمي المعروف بالدستور:

$$(1) (x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k,$$

حيث $x = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ، $y = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ، يحقق الشروط الواردة اعلاه .

ب . يمكن تزويد الفضاء ذي n بعداً R_n بجداء سلمي آخر . انه من السهل تمييز كل الجداءات السلمية الممكنة في R_n . إذا كان (x, y) جداء

سلميا في R_n وكان $x = \sum \xi_k e_k$ ، $y = \sum \eta_k e_k$ يمثلان نشرًا عنصرين x و y ضمن اساس e_1, \dots, e_n (57.2) فإن لدينا، حسب الدستور
14.12 (1):

$$(x, y) = \left(\sum_k \xi_k e_k, \sum_j \eta_j e_j \right) = \sum \xi_k \eta_j (e_k, e_j).$$

وهكذا يكفي معرفة قيم الجداء السلمي من اجل اشعة الاساس (e_j, e_j) ، عند ذلك يعين الجداء السلمي لشعاعين كفيين x, y بطريقة وحيدة حسب الاعداد $\omega_{jk} = (e_j, e_k)$. يجب على الاعداد ω_{jk} أن تحقق شرط التناظر $\omega_{jk} = (e_j, e_k) = (e_k, e_j) = \omega_{kj}$ والمتراجحة:
 $(x, x) = \sum \xi_j \xi_k \omega_{jk} > 0$

وهذا من اجل كل $x \neq 0$ ، يعني ذلك ان المصفوفة $\|\omega_{jk}\|$ متناظرة ومعرفة موجبة. يبرهن في الجبر ان المتراجحات التالية تمثل شرطا لازما وكافيا لكي تكون مصفوفة متناظرة $\|\omega_{jk}\|$ معرفة موجبة:

$$\omega_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

وبالعكس فإن كل مصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة $\|\omega_{jk}\|$ تعرف حسب الدستور:

$$(x, y) = \sum \xi_j \eta_k \omega_{jk}$$

جداء سلميا في الفضاء R_n ، يحقق المسلمات 14.12 أ - د. يمكن للقارئ بعد كل ما قيل القيام بالبرهان دون أدنى صعوبة.

ج. ندخل في الفضاء $R^0(a, b)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المستمرة جداء سلميا، مثلا، انطلاقا من الدستور التالي الذي يعتبر بمثابة المائل المستمر للدستور (1):

$$(2) \quad (x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) y(t) dt.$$

* راجع [14، 69.7].

إن التأكد من مسلمات الفضاء الهيلبرتي بخصوص هذا التعريف امر يسير نظرا للخصائص المعتادة للتكامل. (هناك طرق أخرى لتزويد الفضاء $R^s(a, b)$ بمجاء سلبي).

د. نعتبر الفضاء الشعاعي l_2 (12. 33 - د) المؤلف من كل المتتاليات العددية $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$. نعرف الجداء السلبي (x, y) لشعاعين $x = \{\xi_n\} \in l_2$ و $y = \{\eta_n\} \in l_2$ بالدستور:

$$(3) \quad (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n.$$

إن التقارب، وحتى التقارب المطلق، لسلسلة الطرف الايمن ينتج من المتراجحة $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ القائمة من اجل كل ثنائية عددين حقيقيين a و b . كما ان المسلمات 14. 12 أ - د بديهية في هذه الحالة.

وهكذا فإن الفضاء l_2 فضاء هيلبرتي. يطابق التنظيم المولد عن الجداء السلبي (3) نظم l_2 المدخل في 33. 12 - د.

34. 12. هندسة الفضاء الهيلبرتي.

أ. كنا استخلصنا، منذ 86. 2، متراجحة كوشي - بونياكو فسكي:

$$(1) \quad |(x, y)| \leq +\sqrt{(x, x)(y, y)}$$

بالنسبة لشعاعين x و y من فضاء هيلبرتي H (لأننا في الواقع لم نستعمل سوى مسلمات الفضاء الهيلبرتي).

نزود الفضاء الهيلبرتي H بالنظم:

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}.$$

يمكن التأكد بسهولة من المسلمات 13. 12 لفضاء هيلبرتي: تنتج المسلمة 13. 12 - أ من المسلمة 14. 12 - أ، والمسلمة 13. 12 - ب من 14. 12 - ج. اما فيما يخص مسلمة المثلث 13. 12 - ج فإننا استخلصناها من مسلمات الفضاء الهيلبرتي ضمن 86. 2 باستخدام المتراجحة (1).

وهكذا فإن كل المفاهيم والخصائص المرتبطة بوجود نظم قائمة في

الفضاءات الهيلبرتية. لكن لما كانت هذه الفضاءات تمثل حالات خاصة من الفضاءات النظيمية فإنه من حقنا ان نتوقع ان يعطى نظيم الفضاء الهيلبرتي خاصيات أخرى مميزة. ها هي خاصية من هذا النوع:

توطئة حول متوازي الاضلاع: لدينا المساواة التالية من اجل كل شعاعين x و y من فضاء هيلبرتي H :

$$(3) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(« إن مجموع مربعي قطري متوازي اضلاع يساوي مجموع مربعات اضلاعه »).

يتمثل البرهان في تحويل بسيط:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= 2(x, x) + 2(y, y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

يمكن البرهان على انه إذا حقق نظيم فضاء نظيمي الشرط (3) فإن هذا النظيم مولد عن جداء سلمي (التمرين 4).

ما هو شكل سطح الكرة $\{\|x\| = 1\}$ في R_n في الحالة التي يكون فيها النظيم $\|x\|$ محصلا عليه انطلاقا من جداء سلمي (x, y) حسب الدستور: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ (راجع 86.2 - أ) ؟
لدينا في هذه الحالة:

$$(x, x) = \left(\sum_j \xi_j e_j, \sum_k \xi_k e_k \right) = \sum_j \sum_k \xi_j \xi_k (e_j, e_k) = 1,$$

أي أن سطح الكرة $\|x\| = 1$ سطح ذو مركز من الدرجة الثانية، بما انه محدود فهو يمثل مجسما ناقصياً.

ب. لتكن $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ متتاليتين متقاربتين عناصرهما في فضاء هيلبرتي H . لنثبت ان: $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

لدينا بالفعل:

$$(x, y) - (x_n, y_n) = (x, y - y_n) + (x - x_n, y_n),$$

ومن المتراجحة (1) يأتي:

$$|(x, y) - (x_n, y_n)| \leq \|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y_n\|;$$

يؤول الطرف الايمن الى 0 لما n يؤول الى ∞ لأن $\|y - y_n\| \rightarrow 0$ و $\|x - x_n\| \rightarrow 0$. ولأن المتتالية المتقاربة y_n محدودة (33.3 - ب).

ج. يمكن في فضاء هيلبرتي ليس فحسب قياس اطوال (نظيمات) الاشعة بل ايضا الزوايا تشكلها هذه الاشعة. نعرف زاوية شعاعين غير منعدمين x

$$\text{و } y \text{ بالدستور: } \cos(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|};$$

تضمن المتراجحة (1) وجود هذه الزاوية (في المجال $[0, \pi]$).

د. نقول عن شعاعين x و y من فضاء هيلبرتي H إنها متعامدان إذا كان $(x, y) = 0$. إذا كان $x \neq 0$ و $y \neq 0$ فإن هذا التعريف يعني ان زاوية الشعاعين x و y تساوي $\frac{\pi}{2}$. إن الشعاع المنعدم عمودي على كل شعاع.

يكتب شرط التعامد في فضاء اقليدي R_n بالجداء السلمي 24.12 (1) باعتبار شعاعين: $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ، على الشكل:

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k = 0.$$

ويكتب شرط التعامد في الفضاء التابعي $R^*(a, b)$ بالجداء السلمي 24.12 (2)، باعتبار الشعاعين $x = x(t)$ و $y = y(t)$ ، على الشكل:

$$\int_a^b x(t) y(t) dt = 0.$$

ر. إذا كان الشعاع x عمودياً على الاشعة y_1, \dots, y_m ، فهو عمودي على كل عبارة خطية $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m$. ذلك أن:

$$(x, \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_m y_m) = \alpha_1 (x, y_1) + \dots + \alpha_m (x, y_m) = 0.$$

تسمى الدساتير (4)، بمعاملات a_{jk} جيدة الاختيار، دساتير المعامدة. إن وجود حل لهذه الجملة يحقق الشروط المطلوبة المتعلقة بالتعامد يثبت بسهولة بطريقة التدرج. لرؤية ذلك نفرض أننا انشأنا الأشعة y_1, \dots, y_{n-1} غير المنعدمة والمعامدة مثنى مثنى والمحقة للمعادلات الأولى البالغ عددها $n-1$ في الجملة (4)، نبين بعد ذلك أنه بالإمكان إيجاد شعاع y_n يحقق المعادلة ذي الرتبة n في (4)، وعمودي على الأشعة y_1, \dots, y_{n-1} . نبحث عن الشعاع y_n في شكل عبارة خطية للأشعة x_1, \dots, x_n وهذا على النحو:

$$(5) \quad y_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{n,n-1}y_{n-1} + x_n,$$

حيث y_1, \dots, y_{n-1} هي الأشعة المحصل عليها سابقاً، و: $b_{n1}, \dots, b_{n,n-1}$ هي المعاملات الواجب تعيينها. بضرب المعادلة (5) سلمياً في y_k (حيث $k < n$) وباستخدام التعامد المفروض لـ y_k على: $y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_{n-1}$ نحصل على:

$$(y_n, y_k) = b_{nk} (y_k, y_k) + (x_n, y_k).$$

بجعل الطرف الأيمن مساوياً للصفر نصل إلى معادلة بالنسبة للمعامل b_{nk} قابلة للحل لأن $(y_k, y_k) \neq 0$ وهذا حسب فرض التدرج. عندما يتم وجود كل المعاملات $b_{n1}, \dots, b_{n,n-1}$ فإن المساواة (5) تعين الشعاع y_n . يكون هذا الشعاع، انشاءً، عمودياً على كل من الأشعة y_1, \dots, y_{n-1} ، يبقى أن نثبت بأن $y_n \neq 0$. من أجل ذلك ننقل في المعادلة رقم n في (4) عبارات y_1, \dots, y_{n-1} المحصل عليها من المعادلات السابقة البالغ عددها $n-1$ ، نحصل عندئذ على عبارة خطية لـ y_n بدلالة x_1, \dots, x_n حيث يساوي معامل العدد 1. لو كان y_n منعدماً فإننا نحصل على ارتباط خطي بين الأشعة x_1, \dots, x_{n-1}, x_n ، وهذا غير صحيح حسب فرض التدرج. إذن $y_n \neq 0$ ، ينتهي بذلك عرض طريقة المعامدة.

يمكن «تحسين» الجملة المتعامدة المحصل عليها y_1, \dots, y_n, \dots بتقسيم كل شعاع y_n على طوله فنحصل على جملة اشعة $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ متعامدة وفي نفس الوقت متجانسة أو تنظيمية، أي أن نظم كل شعاع e_n يساوي 1. نقول عن هذه الجملة، إنها جملة متعامدة ومتجانسة.

ط. تشاكل فضاءين اقليديين بعدها n . طبقا للتعريف العام لتشاكل بنيتين رياضيتين (25.2)، نقول عن فضاءين هيلبرتيين H' و H'' إنها متشاكلان إذا كانا متشاكلين بوصفهما فضاءين شعاعيين (41.12-4) وإذا كانت، زيادة على ذلك، الصلتان $x' \leftrightarrow x''$ ، $y' \leftrightarrow y''$ (حيث $x' \in H'$ ، $y' \in H'$ ، $x'' \in H''$ ، $y'' \in H''$) تستلزمان:

$$(x', y') = (x'', y'').$$

لنبرهن على أن فضاءين هيلبرتيين كفيين من نفس البعد n ، فضاءان متشاكلان.

للقيام بذلك نشيء في فضاء ذي n بعداً معطي H_n أساساً متعامداً ومتجانساً e_1, \dots, e_n وهذا بمعامدة أية جملة n شعاعاً مستقلة خطياً وفق الطريقة الواردة في ص. نحسب الجداء السلمي لشعاعين $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ و $y = \sum_1^n \eta_m e_m$ بما أن الأشعة e_1, \dots, e_n متعامدة ومتجانسة، فإن:

$$(6) \quad (x, y) = \left(\sum_1^n \xi_k e_k, \sum_1^n \eta_m e_m \right) = \sum_1^n \sum_1^n \xi_k \eta_m (e_k, e_m) = \sum_1^n \xi_k \eta_k.$$

وهكذا يمكن تمثيل أي فضاء هيلبرتي بعده n كفضاء احداثيات (وهذا بوصل كل شعاع $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ بمجموعة احداثياته (ξ_1, \dots, ξ_n)) مزود بالجداء السلمي المعروف بـ (6). يعني ذلك أن الفضاء H_n متشاكل مع الفضاء R_n (24.12 - أ). وبالتالي فإن كل فضاءين هيلبرتيين H'_n و H''_n بعدها n فضاءان متشاكلان لأنها متشاكلان مع نفس الفضاء R_n .

إن النتيجة السابقة على جانب كبير من الأهمية. لأن حتى ولو تعلق

الامر بفضاء هيلبرتي بعده غير منته فإننا عندما نعمل في فضاء جزئي بعده منته، في فضاء ذي بعدين أو ثلاثة ابعاد مثلا، نستطيع الاعتماد على النتائج المعروفة الواردة في الهندسة الاقليدية المعتادة.

12. 44. لما كان العامل في حقل التحليل يحتاج في اغلب الاحيان للتوابع ذات القيم العقدية، فإنه يجب تعميم مفهوم الفضاء الهيلبرتي بشكل مناسب. في الحالة التي يكون فيها فضاء شعاعي عقدياً فإن قيم الجداء السلمي الذي نود ادخاله يمكن ان تكون عقدية. عندئذ لا يمكن الاحتفاظ بالشروط 12. 14. أ - ج لأن العبارة (ix, ix) ينبغي أن تكون موجبة حسب أ في حين نجد، حسب ب و ج، أن:

$$(ix, ix) = i(x, ix) = i(ix, x) = i^2(x, x) < 0.$$

ولذا نسلم في فضاء عقدي بالتعريف التالي.

نقول عن فضاء شعاعي عقدي (أي فضاء شعاعي تكون عملية الضرب فيه في الاعداد العقدية) إنه فضاء هيلبرتي إذا عرفنا من اجل كل شعاعين x و y من H عددا عقديا (x, y) ، يسمى الجداء السلمي لـ x و y ، يتمتع بالشروط التالية:

أ. $0 < (x, x)$ عندما $x \neq 0$ ، $(0, 0) = 0$.

ب. $(y, x) = \overline{(x, y)}$ مهما كان x و y في H . (المدة - تعني المرافق العقدي)

ج. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ مهما كان x و y في H و α عقدياً.

د. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ مهما كان x, y, z في H .

ينتج من ب و ج أن:

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \bar{\alpha} \overline{(y, x)} = \bar{\alpha} (x, y).$$

نجد، انطلاقاً من ب - ر، الدستور العام:

$$(1) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^n \beta_k y_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (x_j, y_k).$$

12. 54. أمثلة .

أ. من أبسط الامثلة في الفضاءات الهيلبرتية العقدية الفضاء العقدي ذي n بعداً C_n . انه يتكون من المجموعات المرتبة المؤلفه من n عددا عقديا $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ، بالعمليتين الخطيتين المتعامدتين (احداثياً) وبالجداء السلمي المعرف كما يلي: إذا كان $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ فإن $(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$ ، حيث $\bar{\eta}_k$ هو العدد العقدي المرافق لـ η_k . إن المسلمات 44. 12 أ - د بديهية في هذه الحالة .

يمكن أيضاً تزويد الفضاء C_n بجداءات سلمية اخرى [14، ع 1.9] .

ب. هناك مثال آخر للفضاءات الهيلبرتية وهو الفضاء $C^0[a, b]$ المؤلف من التوابع $x(t)$ ذات القيم العقدية المستمرة على مجال $a \leq t \leq b$. والمزود بالجداء السلمي المعرف بالدستور:

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt .$$

تنتج الخاصيات 44. 12 أ - د بسهولة من الخاصيات المعتادة للتكامل .

ج. إن المائل العقدي للفضاء الحقيقي l_2 (24. 12 - د) هو الفضاء المؤلف من كل المتتاليات العددية العقدية $x = \{\xi_n\}$ التي تحقق

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty .$$

يعطى هنا الجداء السلمي بالدستور:

$$(x, y) = ((\xi_n), (\eta_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n .$$

يمكن التأكد من المسلمات 44. 12 بدون اية صعوبة .

12. 64 - أ. ليكن H فضاء هيلبرتي عقدي . نضع كما هو الحال في الحالة الحقيقية:

$$(1) \quad \|x\| = +\sqrt{(x, x)} .$$

نبرهن على متراجحة كوشي - بونياكوفسكي - شفارتز:

$$(2) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| .$$

من اجل كل عقدي α ، لدينا المتراجحة:
 $(\alpha x - y, \alpha x - y) \geq 0$.

باجراء العمليات في الطرف الايسر يأتي:

$$\alpha \bar{\alpha} (x, x) - \alpha (x, y) - \bar{\alpha} (\overline{x, y}) + (y, y) \geq 0.$$

نضع $\alpha = te^{-i \arg(x, y)}$ (t حقيقي)؛ عندئذ $| (x, y) | = t | (x, y) |$ وتأخذ المتراجحة الشكل:

$$t^2 (x, x) - 2t | (x, y) | + (y, y) \geq 0.$$

بما ان ثلاثي الحدود الوارد في الطرف الايسر لا يملك جذورا حقيقية مختلفة (لو كان ذلك لتغيرت اشارته) فإن معاملاته تحقق المتراجحة:
 $(x, x)(y, y) \leq | (x, y) |^2$ ، وهو المطلوب.

ب . نلاحظ ، كما هو الحال في الحالة الحقيقية ، ان المتراجحة (2) تستلزم

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad \text{متراجحة المثلث} :$$

باعتبار النظم (1).

ج . نلاحظ أيضا ، كما هو الشأن في الحالة الحقيقية ، أننا نقول عن شعاعين x و y في فضاء هيلبرتي عقدي H إنها متعامدان إن كان $(x, y) = 0$. نستطيع ، كما ورد في 12 - 24 - ص ، معامدة كل جملة x_1, \dots, x_n مؤلفة من أشعة ، كل جزء منته منها مستقل خطيا ، أي ان بإمكاننا انشاء حسب الدساتير 12 - 34 - ص (4) ، جملة اشعة غير منعدمة ومتعامدة مثنى مثنى . بصفة خاصة ،

فإن كل فضاء هيلبرتي عقدي بعده n : H_n يملك اساسا متعامدا ومتجانسا

$$x = \sum_1^n \xi_k e_k \quad \text{و} \quad y = \sum_1^n \eta_m e_m \quad \text{بفضل الدستور} :$$

$$(x, y) = \left(\sum_1^n \xi_k e_k, \sum_1^n \eta_m e_m \right) = \sum_1^n \xi_k \bar{\eta}_m (e_k, e_m) = \sum_1^n \xi_k \bar{\eta}_k.$$

بصفة خاصة ، ينتج من الدستور (3) ، كما هو الشأن في الحالة

الحقيقية، ان كل فضاء بعده n : H_n متشاكل مع الفضاء C_n (12. 54 - أ) وان، بالتالي كل فضاء-ين هيلبرتيين عقديين بعدها n فضاءان متشاكلان.

12. 74 تنمة فضاء هيلبرتي . كما هو الشأن في فضاء نظيمي، فإن الفضاءات الهيلبرتية (حقيقية أو عقدية) يمكن ان تكون تامة او غير تامة. وهكذا فإن الفضاءات الهيلبرتية ذات الابعاد المنتهية، حقيقية كانت او عقدية، (12. 24 - أ، ب، 12. 54 - أ) كلها فضاءات تامة (12. 53 - ر، 12. 93 - ص). إن فضاءي التوابع بالجداء السلمي التكاملي (12. 23 - ج، 12. 54 - أ - ب) ليسا تامين (راجع 12. 62 - ب). أما الفضاءات الحقيقية (12. 24 - د) والعقدي (12. 54 - ج) فهما تامان (التمرين 18) إذا لم يكن فضاء هيلبرتي H تاما فإننا نستطيع تميمه بايجاد فضاء نظيمي يحوى H كما فعلنا في 12. 83. لنثبت ان تنمة فضاء هيلبرتي ليست فضاء نظيمياً فحسب بل هي أيضا فضاء هيلبرتي. لرؤية ذلك علينا أن نعرف في التتمة عملية ضرب سلمي بحيث تتحقق المسلمات 12. 14 - أ - د (في الحالة الحقيقية) أو المسلمات 12. 44 - أ - د (في الحالة العقدية).

كنا عرفنا كل عنصر X من تنمة فضاء نظيمي R على انه رمز يوافق صف متتاليات كوشية متحدة النهاية من الفضاء R . ليكن X و Y عنصرين كيفيين من التتمة \bar{H} لفضاء هيلبرتي H ، ولتكن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتين كوشيتين تنتميان الى الصفتين X و Y على التوالي. لنثبت ان للاعداد (x_n, y_n) نهاية لما $n \rightarrow \infty$. لدينا:

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| &= |(x_n - x_m, y_n) + (x_m, y_n - y_m)| \leq \\ &\leq \|x_n - x_m\| \|y_n\| + \|x_m\| \|y_n - y_m\|. \end{aligned}$$

بما أن المتتاليتين الكوشيتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ محدودتان (3. 17 - ج) فإن الكمية المحصل عليها توول الى الصفر لما $m \rightarrow \infty$ و $n \rightarrow \infty$ ، وهو ما يجعل المتتالية العددية (x_n, y_n) تحقق مقياس كوشي. ينتج من ذلك

انها تقبل نهاية. إن هذه الاخيرة لا تتعلق باختيار المتتالية $\{x_n\}$ في الصف X والمتتالية $\{y_n\}$ في الصف Y ، إذا كانت $\{x'_n\}$ و $\{y'_n\}$ متتاليتين اخريين في الصفين المعبرين فإن:

$$|(x'_n, y'_n) - (x_n, y_n)| = |(x'_n - x_n, y'_n - y_n)| \leq \\ \leq \|x'_n - x_n\| \|y'_n\| + \|x_n\| \|y'_n - y_n\| \rightarrow 0,$$

لما $n \rightarrow \infty$ ، وهو الامر الذي يجعل المتتاليتين العدديتين (x'_n, y'_n) و (x_n, y_n) يقبلان نفس النهاية. نضع الآن:

$$(X, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n).$$

كنا رأينا بان العدد (X, Y) معين تماماً بالصفين X و Y بدون ان يتعلق باختيار المتتاليتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ في هذين الصفين بصفة خاصة، فإن العدد $\|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n, x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(X, X)}$ يطابق نظيم الصف X في الفضاء النظيمي \bar{H} . وبالتالي فإن المسلمات 14. 12 ب - د (أو 44. 12 ب - د في الحالة العقدية) محققة بالانتقال الى النهاية في المسلمات المتوالية في الفضاء H . لدينا على سبيل المثال في الحالة الحقيقية:

$$(Y, X) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (X, Y),$$

نتأكد من المسلمات الأخرى بطريقة مماثلة.

12. 84. الفضاءات شبه الهيلبرتية.

أ. يحدث أحيانا، بخصوص فضاء شعاعي L (نفرضه حقيقياً لتثبيت فكر القارئ)، اننا نستطيع ادخال تابع (x, y) يحقق المسلمات 14. 12 ب - د ولا يحقق المسلمة 14. 12 أ: توجد عناصر $z \neq 0$ بحيث $(z, z) = 0$. يسمى مثل هذا الفضاء فضاء شبه هيلبرتي. يتبين انه بالامكان الانتقال من الفضاء L الى فضاء النسبة L/E (12. 41 - ع) الذي يمكن اعتباره فضاء هيلبرتيّاً.

ب. نختار E مساويا لمجموعة شكل العناصر z بحيث $(z, z) = 0$. إذا كان $(z, z) = 0$ و $y \in L$ كيفياً فإن متراجحة كوشي - بونياكوفسكي،

الذي يعتمد برهانها على المسلمات 14.12 ب - د، تعطي:

$$(1) \quad |(z, y)| \leq \sqrt{(z, z)} \sqrt{(y, y)} = 0,$$

بحيث ان $(z, y) = 0$ من اجل كل $y \in L$.

لنثبت ان E فضاء جزئي من L . إذا كان $z_1 \in E$ ، $z_2 \in E$ فإن المتراجحة (1) تعطي:

$$(z_1 + z_2, z_1 + z_2) = (z_1, z_1) + 2(z_1, z_2) + (z_2, z_2) = 0,$$

إذن $z_1 + z_2 \in E$. من البديهي أيضا أن $(z_1, z_1) = 0$ تستلزم:

$$(\alpha z_1, \alpha z_1) = \alpha^2 (z_1, z_1) = 0,$$

أي أن $\alpha z_1 \in E$ بمجرد انتماء $z_1 \in E$. وبالتالي فإن المجموعة E فضاء جزئي في L .

نشكل فضاء النسبة $H = L/E$ ونزوده بالجداء السلمي:

$$(X, Y) = (x, y)$$

حيث $x \in X, y \in Y$ مختارين كيفياً. لنبين في البداية ان التعريف المعطى

للجداء السلمي لا يتعلق باختيار العنصرين x و y في الصفين (X, Y) على

التوالي. ليكن $x_1 \sim x, y_1 \sim y$ بحيث $x_1 = x + z, y_1 = y + u$ ،

$z \in E, u \in E$ عندئذ يتبين من (1) ان لدينا:

$$(x_1, y_1) = (x, y) + (z, y) + (x, u) + (z, u) = (x, y)$$

وهو المطلوب.

لنتأكد من المسلمات 14.12 أ - د من اجل الفضاء H . إذا كان

$(X, X) = 0$ فإن $(x, x) = 0$ من اجل كل $x \in X$ ، إذن X يطابق

الصف E الذي يمثل الصفر للفضاء L/E (41.12 - ع) وبذلك نتأكد

من المسلمة 14.12 - أ. فيما يتعلق بالمسلمات الاخرى فهي تنتج من المسلمات

المتوالية للفضاء L ومن التعريف (2). وهكذا يتضح أن الفضاء $H = L/E$ فضاء هيلبرتي.

ج. يمكن انجاز انشاء مماثل تماما للسابق باعتبار فضاء شبه هيلبرتي عقدي L : إذا كانت E هي مجموعة العناصر $z \in L$ التي تحقق : $(z, z) = 0$ فإن $L/E = H$ فضاء هيلبرتي عقدي.

د. في سياق الامثلة نعتبر الفضاء الشعاعي الحقيقي $(G(a, b))$ المؤلف من كل التوابع المستمرة بتقطع على مجال $[a, b]$ المزود بالجداء السلمي :

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) y(t) dt.$$

إن المسلمات 14.12 ب - د محققة اما المسلمة 14.12 - أ فلا لأن لدينا، فيما يتعلق بتابع $z(t) \in G$ منعدم ايما كان باستثناء عدد منته من النقاط :

$$(z(t), z(t)) = \int_a^b z^2(t) dt = 0 \quad (3)$$

وهذا حسب 61.9 - ج، على الرغم من ان $z(t)$ ليس صفر الفضاء G . وبالتالي فإن G ليس فضاء هيلبرتي بل شبه هيلبرتي. يمكن الوصول الى فضاء هيلبرتي بالانتقال من الفضاء G الى فضاء النسبة G/E حيث E هي مجموعة كل التوابع $z(t) \in G$ التي تحقق المساواة (3) : انها التوابع التي لا تختلف عن الصفر الا في عدد منته من النقاط (61.9 - د). يتشكل فضاء النسبة G/E من صفوف التوابع $x(t) \in G$ ، يكون تابعا في نفس الصف إذا لم يختلفا الا في عدد منته من النقاط.

ر. إن الانتقال من الفضاء شبه الهيلبرتي العقدي $G[a, b]$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة بتقطع على المجال $[a, b]$ ، المزود بالجداء

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$$

السلمي :

الى فضاء النسبة الهيلبرتي العقدي G/E على الفضاء الجزئي E المؤلف من التوابع العقدية التي لا تختلف عن الصفر الا في عدد منته من النقاط، يتم بطريقة مماثلة.

سواصل دراسة الفضاءات الهيلبرتية في الفصل 14 باعتبار جوانبها التطبيقية في التحليل.

ع 5.12. التقريبات في فضاء التوابع المستمرة على متراص.

15.12. إن الفضاء $R^s(Q)$ ($C^s(Q)$ على التوالي) المؤلف من التوابع الحقيقية (العقدية على التوالي) المستمرة على متراص Q فضاء شعاعي (31.12 ع - ق) نظمي (23.12 - أ، 93.12 - د) وتام (32.12 - س). سنعتبر جماعة خطية مختلفة $B(Q)$ مؤلفة من التوابع الحقيقية (العقدية على التوالي) المستمرة على متراص Q . ماهي الشروط التي ينبغي فرضها على الجماعة $B(Q)$ لكي يكون الملاصق بالنسبة للتقارب المنتظم على المتراص Q ، أي بالنسبة لتنظيم الفضاء $R^s(Q)$ ($C^s(Q)$) على التوالي) محتويا لكل التوابع المستمرة على Q ؟

أ. نقول عن جماعة $B(Q)$ من التوابع إنها تفصل نقطتين z و y من المجموعة Q إذا وجد في $B(Q)$ تابع $\varphi(x)$ بحيث $\varphi(z) \neq \varphi(y)$ تابع فاصل للنقطتين z و y . يعني القول ان $B(Q)$ لا يفصل النقطتين z و y ان $f(z) = f(y)$ مهما كان التابع $f(x) \in B(Q)$. وفي الحالة الاخيرة فإن ملاصق الجماعة $B(Q)$ لا يمكن ان يحوي كل التوابع المستمرة إذ أن المساواة الواردة آنفا تبقى قائمة عند الانتقال الى ملاصق الجماعة $B(Q)$ بالنسبة للتقارب المنتظم. على سبيل المثال فهو لا يحوي التابع $\rho(x, y)$ المنعدم من اجل $x = y$ وغير المنعدم من اجل $x \neq y$. إذن إذا أردنا أن يحوي ملاصق جماعة $B(Q)$ كل التوابع المستمرة على المتراص Q ، فإن علينا أن نفرض بانها تفصل اية نقطتين من المتراص Q . ب. نقول عن جماعة خطية $B(Q)$ من التوابع الحقيقية على المجموعة Q إنها شبكة خطية إذا احتوت المجموعة $B(Q)$ التابع $|f(x)|$ عند احتوائها التابع $f(x)$.

لدينا من اجل كل عددين حقيقيين α و β :

$$\begin{aligned}\max \{ \alpha, \beta \} + \min \{ \alpha, \beta \} &= \alpha + \beta, \\ \max \{ \alpha, \beta \} - \min \{ \alpha, \beta \} &= | \alpha - \beta |.\end{aligned}$$

وبالتالي لدينا، من اجل كل تابعين حقيقيين $f(x)$ و $g(x)$:

$$\begin{aligned}\max \{ f(x), g(x) \} + \min \{ f(x), g(x) \} &= f(x) + g(x), \\ \max \{ f(x), g(x) \} - \min \{ f(x), g(x) \} &= | f(x) - g(x) |.\end{aligned}$$

بجمل هذين المعادلتين بالنسبة لـ $\max \{ f(x), g(x) \}$ و

$\min \{ f(x), g(x) \}$ نرى ان شبكة خطية تحوي التابعين

$\max \{ f(x), g(x) \}$ و $\min \{ f(x), g(x) \}$ عندما ينتمي اليها

التابعين $f(x)$ و $g(x)$. ثم نستخلص بسهولة، بالتدرج، أنه إذا

احتوت شبكة خطية نوابغ $f_1(x), \dots, f_n(x)$ فإنها تحتوي أيضا

التابعين $\max \{ f_1(x), \dots, f_n(x) \}$ و $\min \{ f_1(x), \dots, f_n(x) \}$.

ج. نظرية. إذا فصلت شبكة خطية $B(Q)$ على متراص Q اية نقطتين

من المتراص واحتوت التابع $e(x) \equiv 1$ فإنها كثيفة ايما كان في فضاء كل

النوابغ المستمرة على Q .

البرهان. إن كل شبكة خطية $B(Q)$ تحوي 1 وتفصل نقطتين z و y

تحوي بالضرورة كل تابع يأخذ عند النقطتين z و y اية قيمتين معطاتين،

قد نجد مثل هذا التابع على الشكل $a\varphi(x) + b.1$ ، حيث $\varphi(x)$ تابع

من $B(Q)$ يفصل النقطتين z و y اما a و b فثابتان.

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى و $f(x)$ تابعا مستمرا. مهما كانت النقطتان z و y

(مختلفتان أو غير مختلفتين) يمكن ايجاد حسب ما قلناه آنفا تابع

$\varphi_{zy}(y) = f(y)$ ، $\varphi_{zy}(z) = f(z)$ حقق $B(Q) \ni \varphi_{zy}(x)$

ليكن:

$$U_{zy} = \{ x \in Q : \varphi_{zy}(x) < f(x) + \varepsilon \}.$$

إن المجموعة U_{zy} مفتوحة وتحتوي النقطتين z و y . لنثبت z ،

عندئذ تشكل المجموعات المفتوحة U_{zy} المعتبرة من اجل كل العناصر

$Q \ni y$ تغطية للمتراس Q . يأتي من التغطية 79.3 اننا نستطيع استخراج تغطية منتهية $U_{zy_1}, \dots, U_{zy_m}$. نعتبر التابع :

$$\varphi_z(x) = \min \{ \varphi_{zy_1}(x), \dots, \varphi_{zy_m}(x) \}$$

المنتمي الى الشبكة الخطية $B(Q)$ بما ان هناك على الاقل متراجحة واحدة قائمة من المتراجحات التي تعرف الساحات U_{zy_k} ، من اجل كل $x \in Q$ ومن اجل z مثبت ، فإن لدينا : $\varphi_z(x) \equiv \min_k \varphi_{zy_k} < f(x) + \varepsilon$ من اجل كل $x \in Q$. لدينا في نفس الوقت $\varphi_z(z) = \min_k \varphi_{zy_k}(z) = f(z)$. نضع

$$V_z = \{ x \in Q : \varphi_z(x) > f(x) - \varepsilon \}$$

إن المجموعة V_z مفتوحة وتحتوي النقطة z . تشكل المجموعات V_z من اجل كل العناصر $z \in Q$ تغطية للمتراس Q . يمكن حسب التغطية 79.3 أن نستخرج منها تغطية منتهية : V_{z_1}, \dots, V_{z_n}

نضع الآن : $\varphi(x) = \max \{ \varphi_{z_1}(x), \dots, \varphi_{z_n}(x) \}$

ينتمي هذا التابع أيضا الى الشبكة الخطية $B(Q)$ ، ولدينا انشاء :

$$\varphi(x) = \max_j \varphi_{z_j}(x) < f(x) + \varepsilon$$

ثم هناك على الاقل متراجحة قائمة من المتراجحات التي تعرف الساحة V_{z_j} وهذا من اجل كل نقطة $x \in Q$ ، إذن :

$$\varphi(x) = \max_j \varphi_{z_j}(x) > f(x) - \varepsilon$$

في الختام لدينا من اجل كل $x \in Q$:

$$f(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon$$

وهذا ما يثبت النظرية .

(تسقط النظرية لو نتجاهل الفرض $1 \in B(Q)$: لتكن z و y :

نقطتين معطاتين ، إن الشبكة الخطية المؤلفة من كل التوابع المستمرة

$f(x)$ التي تحقق الشرط $f(z) = 2f(y)$ ليست كثيفة اينما كان في الفضاء $R^0(Q)$.

25. 12 . نظرية ستون (Stone).

أ. طبقا للتعريف العام لجبر (81. 12 - أ)، فإن كل جماعة خطية $B(Q)$ مؤلفة من التوابع (الحقيقية) على متراص Q تسمى جبراً إذا احتوت الجماعة $B(Q)$ التابع $f(x)g(x)$ عند احتوائها تابعين كفيين $f(x)$ و $g(x)$.

ب. توطئة. إن الجبر الحقيقي $B(Q)$ الذي يحوي الوحدة والمغلق بالنسبة للتقارب المنتظم يمثل شبكة خطية.

البرهان. لنثبت ان التابع $|f(x)|$ ينتمي الى الجبر $B(Q)$ بمجرد انتاء $f(x)$ له. بدون المس بعمومية النتيجة يمكن وضع $\max_x |f(x)| = 1$.

نعتبر سلسلة التaylor:

$$(1 - \xi)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \xi + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \xi^2}{1 \cdot 2} - \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (-\xi)^n + \dots$$

رأينا في 25. 9 - د (يجب وضع $\alpha = 1/2$) وفي 56. 6 انها سلسلة متقاربة بانتظام من اجل $0 \leq \xi \leq 1$

بما ان المتراجحة $0 \leq f^2(x) \leq 1$ محققة على المتراص Q ، لدينا حسب ما رأيناه أعلاه:

$$|f(x)| = \sqrt{1 - (1 - f^2(x))} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (1 - f^2(x)) - \frac{1}{8} (1 - f^2(x))^2 + \dots;$$

حيث سلسلة الطرف الايمن سلسلة متقاربة بانتظام على Q . بما ان الجبر $B(Q)$ مغلق بالنسبة للتقارب المنتظم فإن $|f(x)| \in B(Q)$ ، وهو المطلوب.

ج. نظرية ستون، (الخاصة بجبر حقيقي). إن كل جبر $B(Q)$ مؤلف من توابع حقيقية ويفصل اية نقطتين من المتراص Q ويحوي الوحدة، كثيف أيما كان في الفضاء $R^0(Q)$.

البرهان. نرمزب $\overline{B(Q)}$ للملاصق الجبر $B(Q)$ بالنسبة للتقارب المنتظم. بطبيعة الحال فإن الجماعة $\overline{B(Q)}$ تمثل أيضا جبراً: إذا كان $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (بانتظام على Q) فإن $g_n(x) \rightarrow g(x)$ (بانتظام على Q) فإن $f_n(x)g_n(x) \rightarrow f(x)g(x)$ (بانتظام على Q) الأمر الذي يجعل $f(x)g(x) \in \overline{B(Q)}$ ناتجة من: $f(x) \in \overline{B(Q)}$ و $g(x) \in \overline{B(Q)}$

إن الجبر $\overline{B(Q)}$ شبكة خطية (التوطئة ب) وكثيف أيما كان في الفضاء $R^0(Q)$ (النظرية 15.12 - ج). بما أن الجبر $\overline{B(Q)}$ مغلق فإن $\overline{B(Q)} = R^0(Q)$ ، وهو المطلوب.

35.12. أ. قد نعتقد ان كل جبر مؤلف من توابع ذات قيم عقدية جبر كثيف أيما كان في الفضاء $C^0(Q)$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة على Q شريطة أن يفصل اية نقطتين من المتراص Q وان يحوي الوحدة. إن هذا الاعتقاد خاطيء إن صيغ على هذا النحو (راجع التمرين 5).

ب. لكن إذا تحقق لدينا شرط اضافي فإن نظرية ستون تامل جبور التوابع ذات القيم العقدية. نقول عن جبر عقدي $B(Q)$ إنه متناظر إذا احتوى التابع $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$ عند اتوائه التابع المرافق: $\bar{\varphi}(x) = u(x) - iv(x)$.

نظرية ستون. (الخاصة بجبر عقدي). إن كل جبر متناظر $B(Q)$ مؤلف من توابع ذات قيم عقدية يفصل اية نقطتين من المتراص Q ويحوي الوحدة هو جبر كثيف أيما كان اي الفضاء $C^0(Q)$.

البرهان . يحوي الجبر $B(Q)$ ، فرضاً ، التابعين $u(x) = \frac{1}{2} [\varphi(x) + \bar{\varphi}(x)]$ و $v(x) = \frac{1}{2i} [\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)]$ بمجرد احتوائه تابعا من الشكل $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$ للجبر الجزئي المؤلف من التوابع الحقيقية $B(Q) \ni h(x)$. يفصل هذا الجبر الجزئي اية نقطتين y و z من المتراص Q (إذا كان $\varphi(y) \neq \varphi(z)$ فإن لدينا اما $u(y) \neq u(z)$ أو $v(y) \neq v(z)$) ويحوي الوحدة . لدينا من نظرية ستون 25. 12

$$\overline{B(Q)} = C(Q) \text{ ومنه } \overline{B_R(Q)} = R^s(Q)$$

45. 12 . نتائج من نظريتي ستون .

أ . نفرض أن المتراص Q جزءا مغلقا ومحدودا من R_n وان الجبر $B(Q)$ مؤلف من كل كثيرات الحدود الحقيقية $p(x_1, \dots, x_n)$. إن كل فروض نظرية ستون 25. 12 - ج محققة طبعاً . بتطبيق هذه النظرية نتوصل الى النظرية التالية :

نظرية (فيرشتراس) . إن كل تابع حقيقي $f(x)$ مستمر على مجموعة مغلقة ومحدودة $R_n \supset Q$ تساوي النهاية المنتظمة على Q لتتالية كثيرات حدود x_1, \dots, x_n .

ب . بخصوص الجبر $B(Q)$ المؤلف من كثيرات الحدود $p(x_1, \dots, x_n)$ ذات القيم العقدية فإن فروض نظرية ستون 35. 12 - ب محققة ، وبالتالي يكون كل تابع ذي قيم عقدية $f(x)$ مستمر على مجموعة مغلقة ومحدودة $R_n \supset Q$ نهاية منتظمة على Q لتتالية كثيرات حدود ذات قيم عقدية (لـ x_1, \dots, x_n) . ج . بصفة خاصة ، فإن كل تابع (حقيقي أو عقدي) مستمر على مجال مغلق $a \leq x \leq b$ نهاية منتظمة لتتالية كثيرات حدود (حقيقية أو عقدية على التوالي) .

د . نفرض الآن ان المتراص Q هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في مستوى x, y . إن موقع كل نقطة على هذه الدائرة معين بالزاوية القطبية φ . نختار

الجبر $B(Q)$ مجموعة كثيرات الحدود المثلثة ذات المعاملات الحقيقية:

$$(1) \quad p(\varphi) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

تستلزم دساتير ضرب التوابع المثلثية (36.5) التي يمكن كتابتها على

الشكل:

$$2 \cos k\varphi \cos m\varphi = \cos (k - m) \varphi + \cos (k + m) \varphi,$$

$$2 \cos k\varphi \sin m\varphi = \sin (m - k) \varphi + \sin (m + k) \varphi,$$

$$2 \sin k\varphi \sin m\varphi = \cos (k - m) \varphi - \cos (k + m) \varphi$$

ان مجموعة التوابع (1) تحوي، عند احتواء تابعين كفيين، جداء هذين التابعين وبالتالي فهي بالفعل جبر. إن كل نقطتين φ_1 و φ_2 منفصلتان بتابع من الجبر $B(Q)$ ، وبصفة خاصة، بـ $\sin \varphi$ و $\cos \varphi$ و بتطبيق نظرية ستون 25.12 - ج نحصل على صيغة أخرى للنظرية

أ:

نظرية (فايرشتراس). إن كل تابع حقيقي $f(\varphi)$ مستمر على الدائرة Q يساوي النهاية المنتظمة لمتتالية من كثيرات حدود مثلثية (1) بمعاملاتها حقيقية.

ر. نختار على المستقيم الحقيقي تابعا حقيقيا $g(t)$ مستمرا ودورياً دورته 2π ، بطبيعة الحال يمكننا وصل هذا التابع بتابع مستمر على الدائرة Q بوضع $f(\varphi) = g(\varphi + 2k\pi)$ من اجل كل k . وبالعكس، يمكننا وصل كل تابع $f(\varphi)$ مستمر على الدائرة Q ، بواسطة الدستور $g(t) = f(t)$ ، بتابع $g(t)$ مستمر على كل المستقيم الحقيقي. إذن، تكتب النظرية د على الشكل التالي:

نظرية. إن كل تابع حقيقي $g(t)$ مستمر ودوري دورته 2π على محور نهاية منتظمة (على كل المحور) لمتتالية كثيرات حدود مثلثية.

س. إن الصيغة العقدية للنظريتين أ و د اكثر بساطة إذا ما نظرنا إليها من زاوية اعينة. انطلاقاً من دستوري أولر (36.8):

$$\cos k\varphi = \frac{1}{2} (e^{ikh\varphi} + e^{-ikh\varphi}).$$

$$\sin k\varphi = \frac{1}{2i} (e^{ikh\varphi} - e^{-ikh\varphi}),$$

يمكن تعويض كثيرات الحدود (1) بكثيرات الحدود:

$$(2) \quad q(\varphi) = \sum_{h=-n}^n c_h e^{ikh\varphi}.$$

تأتي النتيجة القائلة ان كثيرات الحدود (2) تشكل جبراً من قواعد ضرب التابع الاسي. ويأتي تناظر هذا الجبر من المساواة $\sum c_h e^{ikh\varphi} = \sum \bar{c}_h e^{-ikh\varphi}$. ان كل نقطتين φ_1 و φ_2 من الدائرة Q منفصلتان بالتابع $e^{i\varphi}$. تقودنا النظرية 35.12 - ب الى النتيجة التالية: نظرية. إن كل تابع ذي قيم عقدية مستمر على الدائرة Q (أو، وهذا يعني نفس الشيء، كل تابع مستمر دورته 2π على المحور $-\infty < t < \infty$) يساوي النهاية المنتظمة لمتتالية كثيرات حدود مثلثية عقدية من الشكل (2).

55.12. متتاليات على شكل دلتا. ان نظرية ستون التي تبين امكانية تقريب تابع مستمر بتتابع جبر $B(Q)$ لا تشير لأية طريقة انشاء للتتابع المقاربة. نشير هنا الى بعض الطرق العملية للتقريبات.

بما اننا نستعمل فيما يلي المكاملة فإننا نفرض ان المتراص Q مجال مغلق من المستقيم العددي أو الدائرة ذات نصف القطر 1 (المجال $[-\pi, \pi]$ حيث يطابق بين طرفيه).

أ. نرمز بـ $U_\rho(y)$ للمجال المفتوح الذي طوله 2ρ ومركزه عند النقطة y . نفرض انه توجد، من اجل نقطة $y \in Q$ معطاة، متتالية توابع غير سالبة $D_n(x; y)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) تتمتع بالخاصيتين التاليتين:

$$0 < \rho \int_{U_\rho(y)} D_n(x; y) dx \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1 \quad (1)$$

$$0 < \rho \int_{Q - U_\rho(y)} D_n(x; y) dx \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0 \quad (2)$$

نقول عن مثل هذه المتتالية إنها في شكل دلنا (من اجل النقطة y). سيأتيك شرح لمصدر هذا اللفظ بعد حين).

ب. نظرية. لتكن $D_n(x; y)$ متتالية في شكل دلنا من اجل نقطة y ، إذا كان $f(x)$ تابعا مستمرا بتقطع ومستمرا عند النقطة y فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q D_n(x; y) f(x) dx = f(y).$$

البرهان. ليكن $M = \sup |f(x)|$ من اجل $0 < \varepsilon$ معطي نختار $0 < \delta$ بحيث $\rho(x, y) \leq \delta$ تستلزم $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ ثم إن لدينا:

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q D_n(x; y) f(x) dx - f(y) \right| = \\ & = \left| \int_Q D_n(x; y) [f(x) - f(y)] dx + f(y) \left[\int_Q D_n(x; y) dx - 1 \right] \right| \leq \\ (1) & \leq \int_{U_\delta(y)} D_n(x; y) |f(x) - f(y)| dx + \int_{Q - U_\delta(y)} D_n(x; y) |f(x) - \\ & - f(y)| dx + |f(y)| \left| \int_Q D_n(x; y) dx - 1 \right| \leq \varepsilon \int_{U_\delta(y)} D_n(x; y) dx + \\ & + 2M \int_{Q - U_\delta(y)} D_n(x; y) dx + M \left| \int_Q D_n(x; y) dx - 1 \right|. \end{aligned}$$

ينتج من الخاصيتين (1) و (2) متتالية في شكل دلنا ان المقدار المحصل اليه اعلاه اصغر من 2ε ، وهذا من اجل n كبير بكفاية، وهو المطلوب. ج. نلاحظ الآن انه إذا كان التابع $D_n(x; y)$ مستمرا بالنسبة لمجموعة المتغيرين $x \in Q$ ، $y \in Q$ وإذا كان $f(x)$ مستمرا بتقطع فإن:

$$f_n(x) = \int_Q D_n(x; y) f(y) dy$$

تابع مستمر على Q . ذلك أن:

$$\begin{aligned} (E) \quad |f_n(x') - f_n(x'')| &= \left| \int_Q [D_n(x'; y) - D_n(x'', y)] f(y) dy \right| \leq \\ &\leq M \int_Q |D_n(x'; y) - D_n(x'', y)| dy, \end{aligned}$$

وعندما نجد، من اجل $\varepsilon > 0$ ، عددا $\delta > 0$ بحيث تنتج من المتراجحة

$$|x' - x''| < \delta \text{ المتراجحة:}$$

$$|D_n(x'; y) - D_n(x''; y)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi M}$$

من اجل كل $y \in Q$ ، فإن لدينا حسب (2):

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leq \varepsilon$$

وهو المطلوب.

د. نختم النظرية بالملاحظة التالية حول التقارب المنتظم. من الواضح بادىء ذي بدء انه إذا تحققت الخاصيتان (1) و (2) من اجل كل نقطة y من مجموعة جزئية $E \supseteq Q$. وإذا كان التابع $f(x)$ مستمرا عند كل نقطة $y \in E$ فإن النتيجة ب قائمة من اجل كل نقطة $y \in E$.

نقول عن العلاقتين (1) و (2) انها محققتان بانتظام على مجموعة $E \supseteq Q$ إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، ايجاد عدد طبيعي N بحيث لا تتجاوز الفروق بين الطرف الايسر من (1) والطرف الايمن من (2)، بالطويلة، العدد ε مهما كان $N \leq n$ و $E \supseteq y$.

نقول عن تابع $f(x)$ انه مستمر بانتظام على E بالنسبة لـ Q إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، ايجاد $\delta > 0$ بحيث نستخلص من صحة $|x - y| \leq \delta$ من اجل $x \in Q$ و $E \supseteq y$ صحة $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

تنتج في هذه الحالة النظرية التالية من التقديرات (3):

نظرية. إذا تحققت العلاقتان (1) و (2) من اجل كل $\rho > 0$ بانتظام على مجموعة E وكان التابع مستمرا بانتظام على E بالنسبة لـ Q فإن التوابع $f_n(x)$ (2) متقاربة بانتظام على E نحو التابع $f(x)$ عندما يؤول n الى ∞ .

ر. بتطبيق النظرية د يمكننا استخدام القياس التالي المتعلق بالاستمرار المنتظم لتابع $f(x)$ على مجموعة E بالنسبة لـ Q :

توطئة. يكون تابع $f(x)$ ، على مجموعة مغلقة $Q \Rightarrow E$ من نقاط استمرار هذا التابع ، مستمرا بانتظام بالنسبة لـ Q .

البرهان . ينتج من نظرية هاين (71.5 - ب) ان التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على E ونستطيع ، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد $\delta_0 > 0$ بحيث يأتي من $E \ni z , E \ni y , |y - z| < \delta_0$ المتراجحة $|f(y) - f(z)| < \varepsilon/2$. نختار بعد ذلك ، من اجل كل نقطة $y \in E$ ، مجالا $|x - y| > \delta(y) \geq \delta_0/2$ تتحقق فيه المتراجحة $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ ، ثم بتطبيق 79.3 نستخرج من التغطية المحصل عليها للمجموعة E تغطية منتهية $|x - y_1| > \delta_1, \dots$ ، $|x - y_n| > \delta_n$. ليكن $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. عندئذ ، مهما كان $Q \ni x , E \ni y$ ، بحيث $|x - y| < \delta$ يمكننا إيجاد نقطة y_k حيث $|x - y_k| < \delta_k$ فنحصل على :

$$|y_k - y| < |y_k - x| + |x - y| < \delta_k + \delta \leq \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0$$

و :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(y_k)| + |f(y_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهو المطلوب .

س . ها هي صيغة اخرى معززة للنظرية ب : إن كانت $D_n(x; y)$ متتالية في شكل دلتا من اجل نقطة y وإن كان $f(x)$ مستمرا عن د $x = y$ فإن لدينا ، من اجل كل متتالية $y \rightarrow y_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q D_n(x; y_n) f(x) dx = f(y)$$

يتم البرهان بالقيام بنفس الحسابات مع تدقيق اكثر للتقديرات .

ص . نعتبر مرة اخرى الحالة التي يكون فيها الوسيط غير المتصل n معوضا بوسيط مستمر t . ليكن $D(t, x, y)$ تابعا غير سالب لثلاثة متغيرات ، يتجول x و y في المتراص Q ويتجول t في مجال $0 < t \leq b$ ؛ نفرض أن الشرطين :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x-y| \leq \rho} D(t, x, y) dx = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \rho} D(t, x, y) dx = 0 \quad (2)$$

محققان من اجل كل $0 < \rho$

عندئذ إذا تعاطينا، من اجل كل t ، مقداراً $y(t)$ يؤول الى النهاية

y عندما $t \rightarrow 0$ فإن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_Q D(t, x, y(t)) f(x) dx = f(y)$$

نثبت هذه المساواة بنفس الحسابات الواردة في حالة النظرية ب

(بمراعاة الملاحظة س). يمكننا القول بان التابع:

$$F(t, y) = \int_Q D(t, x, y) f(x) dx \quad (0 < t \leq b, y \in Q)$$

المعرف عند $t = 0$ بالشرط:

$$F(0, y) = f(y)$$

تابع مستمر في الساحة المغلقة: $0 \leq t \leq b$ ، $Q \ni y$.

ط. نستطيع اهمال الشرط القائل إن $D_n(x; y)$ (أو $D(t, x, y)$ في

ص) غير سالب بتعويضه بالشرط

$$(4) \quad \int_Q |D_n(x; y)| dx \leq c$$

$$(أ و \int_Q |D(t, x, y)| dx \leq c)$$

حيث c لا يتعلق بـ n . إن الشرط (4) اساسي ولولاه لسقطت النظرية،

ذلك ما سنراه في الفصل 14.

ع. ملاحظة. إن مصدر «متتالية في شكل دلتا» هو «التابع دلتا»

لديراك (Dirac). عرّف ب. ديراك في كتابه «مبادئ»

الميكانيكا الكمية» سنة 1930 «التابع دلتا» $\delta(x)$ كتاب على المحور

$-\infty < x < \infty$ منعدم ايما كان باستثناء النقطة $x = 0$ يتمتع بالخاصية

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{التالية:}$$

ثم « برهن » على النظرية التالية: لدينا من أجل كل تابع مستمر عند $x = \xi$ ، المساواة:

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi) f(\xi) d\xi = f(x)$$

كان « البرهان » بسيطاً للغاية: التابع $\delta(x-\xi)$ منعدم من أجل $x \neq \xi$ ولذا فإن قيم التابع $f(\xi)$ ليست ذات أهمية من أجل $x \neq \xi$ ؛ بتعويض $f(\xi)$ بالثابت $f(x)$ وتطبيق (5) نتوصل الى (6). إنه لا يوجد في التحليل الكلاسيكي أي تابع يتمتع بالخصائص التي فرضها ديراك، فمحتوى نظريته في الواقع يشابه الى حد كبير النظرية ب. لم يتم العثور على شكل للتابع دلنا بوصفه كائناً رياضياً إلا بفضل اعمال س. سوبولوف S. Sobolev (1935) و ل. شوارتز L. S. Dixius (1947)، والواقع ان التابع دلنا ليس تابعا معتادا بل تابعا معما (يسمى ايضا توزيعا أو توزيعاً) (راجع مثلاً [13]). يمثل التابع دلنا مثلاً متميزاً على الحدس الرياضي الفائق لعالم فيزيائي، تجاوز المستوى الرياضي لعصره.

65. 12. استخدام المتتاليات ذات الشكل دلنا في إنشاء توابع مقاربة.

أ. نريد مقاربة تابع $f(y)$ معطى بتابع $f_n(y)$ ينتمي الى جبر $B(Q)$ يتم ذلك إذا تمكنا من ايجاد متتالية في شكل دلنا $D_n(x; y)$

بحيث:

$$f_n(y) = \int_Q D_n(x; y) f(x) dx \in B(Q)$$

ب. ليكن $Q = [0, 1]$ وليكن $B(Q)$ الجبر المؤلف من كل كثيرات الحدود المعرفة على $[0, 1]$. نضع، من أجل $n = 1, 2, \dots$:

$$D_n(x; y) = C_n [1 - (x - y)^2]^n$$

حيث:

$$(1) \quad C_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt}$$

ونبين أن $D_n(x; y)$ متتالية في شكل دلتا من اجل كل $y \in (0, 1)$ بما ان التابع:

$$(2) \quad f_n(y) = C_n \int_0^1 [1 - (x-y)^2]^n f(x) dx$$

كثير حدود لـ y درجته $\leq 2n$ (وهذا بديهي) فإننا نحصل على العبارة المتعلقة بكثيرات الحدود الملموسة التي تقارب التابع $f(y)$ ج. توطئة. لدينا من اجل كل $\rho \in (0, 1)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\rho} (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = 0$$

البرهان. ينتج من المتراجحات البسيطة:

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt < (1-\rho^2)^n (1-\rho) < (1-\rho^2)^n$$

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt > \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

ومن العلاقة الخاصة بالنهاية (85.5) (4) و (73.4 - أ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(1-\rho^2)^n = 0$$

لدينا كنتيجة لذلك: إن المساواة التالية محققة مهما كان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\rho} (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = 1 \quad \rho \in (0, 1) \text{ في}$$

د. نتأكد الآن من خاصيات متتالية في شكل دلتا (55.12 أ و د)

بخصوص تابع $D_n(x; y)$.

لدينا، بفضل التوطئة، من اجل كل $\rho \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|x-y| \geq \rho \\ 0 \leq x \leq 1}} D_n(x; y) dx &= C_n \int_{\substack{|x-y| \geq \rho \\ 0 \leq x \leq 1}} [1 - (x-y)^2]^n dx = \\ &= C_n \int_{\substack{|t| \geq \rho \\ -v \leq t \leq 1-v}} (1-t^2)^n dt \leq 2C_n \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \\ &= \frac{\int_0^{\rho} (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

وهذا ما يثبت بان الخاصية (2) محققة بانتظام على المجموعة $0 \leq y \leq 1$.
 ثم لدينا ، من اجل $0 < \rho < \rho_0$ ، $y \in [\rho_0, 1 - \rho_0]$

$$\int_{\substack{|x-y| \leq \rho \\ 0 \leq x \leq 1}} D_n(x; y) dx = C_n \int_{\substack{|x-y| \leq \rho \\ 0 \leq x \leq 1}} [1 - (x-y)^2]^n dx =$$

$$= C_n \int_{-\rho}^{\rho} (1-t^2)^n dt = \frac{\int_0^{\rho} (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

وهذا ما يثبت ان الخاصية (1) محققة بانتظام على المجموعة
 $\rho_0 \leq y \leq 1 - \rho_0$

تشكل كثيرات الحدود (2) ، بفضل النظرية 55.12 - ب و 55.12 -
 ب، متتالية متقاربة من اجل كل $y \in (0, 1)$ وبانتظام على كل مجال:
 $0 < \rho_0 < [\rho_0, 1 - \rho_0]$ ، نحو تابع $f(y)$ مستمر على $(0, 1)$.
 نشير بهذا الصدد ان ذلك يثبت مباشرة نظرية فايرشتراس في المجال
 $[\rho_0, 1 - \rho_0]$. بواسطة تمدد لهذا المجال يمكن تعميم البرهان على كل
 مجال $[a, b]$.

75.12 أ. يمكننا انجاز انشاء مماثل يقودنا الى كثيرات الحدود المقاربة
 المثلثية . لتكن φ الزاوية القطبية التي تعين موقع نقطة على الدائرة
 $Q = \{x^2 + y^2 = 1\}$ و $B(\bar{Q})$ الجبر المؤلف من كثيرات الحدود المثلثية
 الحقيقية . نضع :

$$D_n(\varphi; \psi) = C_n \cos^{2n} \frac{\varphi - \psi}{2},$$

$$(1) \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ونبين أن $D_n(\varphi; \psi)$ متتالية في شكل دلنا من اجل كل . بما ان

$$(2) \quad f_n(\psi) = C_n \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \frac{\varphi - \psi}{2} f(\varphi) d\varphi$$

التابع :

كثير حدود مثلثي لـ ψ (درجته $2n \leq$) فإننا نحصل على كثيرات
لحدود المثلثية الملموسة المقاربة لـ $f(\varphi)$.

ب. توطئة. لدينا من اجل كل $\rho \in (0, \pi/2)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\rho}^{\pi/2} \cos^{2n} t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt} = 0$$

البرهان. بما ان التابع $\cos t$ متناقص من أجل $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$\int_{\rho}^{\pi/2} \cos^{2n} t dt \leq \left(\frac{\pi}{2} - \rho\right) \cos^{2n} \rho \leq \frac{\pi}{2} \cos^{2n} \rho$$

وبما أن محدب من الاعلى على المجال المعتبر فإن $\cos t \geq 1 - 2t/\pi$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt \geq \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

وبالتالي يمكن ان نكتب، بمراعاة 65.5:

$$\frac{\int_{\rho}^{\pi/2} \cos^{2n} t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt} \leq \frac{2(2n+1)}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cos^{2n} \rho \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\rho} \cos^{2n} t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt} = 1$$

نحصل إذن على:

من اجل كل $\rho \in (0, \pi/2)$

ج. بفضل التوطئة ب، لدينا من أجل كل $0 < \rho_0, (0, \rho_0) \ni \rho$:

$$\int_{|\varphi - \psi| \geq \rho} D_n(\varphi; \psi) d\varphi = C_n \int_{|\varphi - \psi| \geq \rho} \cos^{2n} \frac{\varphi - \psi}{2} d\varphi =$$

$$= 2C_n \int_{\frac{\pi}{2} \geq |t| \geq \frac{\rho}{2}} \cos^{2n} t dt = \frac{\int_{\rho/2}^{\pi/2} \cos^{2n} t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

وهذا ما يثبت الخاصية (2) لمتتالية في شكل دلتا (12.55 أ). ثم لدينا من اجل كل $\rho \in (0, \rho_0)$ ، $0 < \rho_0$:

$$\int_{|\varphi - \psi| \leq \rho} D_n(\varphi; \psi) d\varphi = C_n \int_{|\varphi - \psi| \leq \rho} \cos^{2n} \frac{\varphi - \psi}{2} d\varphi =$$

$$= 2C_n \int_{-\rho/2}^{\rho/2} \cos^{2n} t dt = \frac{\int_0^{\rho/2} \cos^{2n} t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

وهذا ما يثبت الخاصية (1). تشكل كثيرات الحدود المثلثية (2)، بفضل النظرية 55.12 - د متتالية متقاربة نحو التابع $f(\varphi)$ بانتظام على كل مجموعة $E \supset Q$ تكون عليها هذا التابع مستمرا بانتظام بالنسبة لـ Q ، بصفة خاصة (55.12 - ر)، على كل مجموعة مغلقة يكون عليها هذا التابع مستمراً.

د. ملاحظة. يمكن تقدير درجة كثير الحدود (الجبري أو المثلثي)، في كلتا الحالتين، الذي ينجز تقريب تابع $f(x)$ بتقدير عدد ε معطى، حسب الدستور (2) أو 65.12 (2). على الرغم من ان لكثيرات الحدود (2) أو 65.12 (2) بنية بسيطة، فإنها لا تمثل عموماً احسن كثيرات الحدود من درجة معطاة يرهن على أنه يوجد من بين كثيرات الحدود ذات الدرجة n ، كثير حدود لا يختلف (على الاكثر) عن تابع $f(x)$ معطى مستمرا على مجال $[a, b]$ إلا بـ $12\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$. يرمز هنا:

$$\omega(\delta) = \max_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

لتذبذب التابع $f(x)$ على المجال $[a, b]$ (71.5 - ج). بخصوص كثيرات الحدود المثلثية (على الدائرة Q) فإن التقدير السابق يعوض بـ: $12\omega(1/n)$ (نظرية د. جاكسون Jackson راجع [9]).

§ 6.12 اشتقاق ومكاملة التوابع التي تأخذ قيمها في فضاء نظيمى.

16.12. المشتق.

أ. ليكن $x(t)$ تابعا معرفا على مجال $a \leq t \leq b$ قيمة في فضاء شعاعي

نظيمي X حقيقي أو عقدي. نقول عن التابع $x(t)$ إنه يقبل الاشتقاق عند نقطة t_0 من $[a, b]$ إذا وجدت في الفضاء X النهاية:

$$(1) \quad x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

تسمى مشتق التابع $x(t)$ عند النقطة $t = t_0$.

ب. نقول عن التابع $x(t)$ إنه قابل للإشتقاق على كل المجال $[a, b]$ إذا وجد مشتق $x(t)$ عند كل نقطة من هذا المجال؛ يكون المشتق $x'(t)$ في هذه الحالة تابع معرف على المجال $[a, b]$ ، قيمة في X.

ج. ينتج من التعريف (1) أنه إذا كان تابع $x(t)$ قابلا للإشتقاق عند كل نقطة t_0 فإن:

$$x(t) - x(t_0) = x'(t_0)(t - t_0) + \varepsilon(t, t_0)(t - t_0)$$

حيث $\varepsilon(t, t_0)$ يؤول الى الصفر في الفضاء X عندما $t \rightarrow t_0$.

د. بصفة خاصة، فإن قابلية $x(t)$ للإشتقاق عند النقطة t_0 تستلزم استمراره عند هذه النقطة. إن كل تابع $x(t)$ قابل للإشتقاق على مجال $[a, b]$ تابع مستمر على هذا المجال.

نثبت بسهولة (كما هو الشأن في الحالة العددية) القواعد الرئيسية للإشتقاق:

ر. إن كان $x(t) = x_0$ عنصرا ثابتا من الفضاء X فإن $x'(t) \equiv 0$.

س. إذا كان $x(t)$ و $y(t)$ تابعين قابلين للإشتقاق قيمهما في X فإن الامر كذلك فيما يخص $x(t) + y(t)$ ولدينا:

$$[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t)$$

ص. إذا كان $x(t)$ تابعا قابلا للإشتقاق وقيمة في X وكان $\gamma(t)$ تابعا عدديا قابلا للإشتقاق فإن الجداء $\gamma(t)x(t)$ تابع قابل للإشتقاق قيمة في X، ولدينا:

$$(2) \quad [\gamma(t)x(t)]' = \gamma'(t)x(t) + \gamma(t)x'(t)$$

وعلى وجه الخصوص: $[\alpha x(t)]' = \alpha x'(t)$

من اجل كل ثابت α .

ط. إذا كان $x(t)$ تابعا لـ t قابلا للإشتقاق قيمه في الفضاء X وكان $t = t(\tau)$ تابعا عدديا قابلا للإشتقاق قيمه في المجال $[a, b]$ فإن $y(\tau) = x(t(\tau))$ تابع لـ τ قابل للإشتقاق، ولدينا:

$$y'(\tau) = x'(t) \cdot t'(\tau)$$

ع. ندخل الآن مفهوم مفاضلة تابع $x(t)$ قيمة في فضاء نظيمي. نقول عن شعاع $dx = x'(c) dt$ حيث $dt = \Delta t$ تزايد كفي للوسيط t إنه تفاضلية التابع الشعاعي $x(t)$ عند $t = c$. وهكذا فإن تفاضلية تابع هي الجزء الخطي الرئيسي لتزايد عند تزايد المتغير t .

تبقى النظرية الخاصة بثبات تفاضلية تابع مركب قائمة: إن لتفاضلية التابع $x(t)$ نفس الشكل سواء كان t مستقلا أو كان تابعا لمتغير مستقل آخر τ (يمثل dt في الحالة الاخيرة الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $t(\tau)$). ذلك انه إذا كان $g(\tau) = x[t(\tau)]$ وكانت $d_\tau x$ هي تفاضلية التابع x بالنسبة للمتغير τ فإن لدينا حسب ص:

$$d_\tau x = g'(\tau) d\tau = x'(c) t'(\tau) d\tau = x'(c) dt = dx,$$

وهو المطلوب.

ف. سنبين فيما يلي (ق) القضية العكسية لـ ر: كل تابع مشتقه يساوي التابع المنعدم هو تابع ثابت. قصد التعميم، نبين هذه النظرية في الحالة التي يكون فيها التابع $x(t)$ قابلا للإشتقاق بتقطع. من اجل ذلك ندخل التعريفين الدقيقين التاليين: نقول عن تابع $x(t)$ قيمه في الفضاء X إنه مستمر يتقطع على مجال مغلق $a \leq t \leq b$ إذا وجدت تجزئة $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ بحيث يكون $x(t)$ مستمرا في كل مجال (t_k, t_{k+1}) وقبل هذا التابع النهايات $x(t_k + 0)$ و $x(t_{k+1} - 0)$ (حيث: $k = 0, 1, \dots, n-1$) كالمعتاد يمكن للتابع $x(t)$ ان يكون معرفا عند النقاط

t_n بالذات بأي شكل من الاشكال او حتى غير معرف عند هذه النقاط. ونقول
 عن التابع $x(t)$ إنه مرن بتقطع على $[a, b]$ إذا كان مستمرا على $[a, b]$
 وقابلا لمشتق $x'(t)$ ايما كان في $[a, b]$ باستثناء عدد منته من النقاط،
 وكان هذا المشتق مستمرا بتقطع.

ق. نظرية. (القضية العكسية للخاصية ر). إذا كان $x(t)$ ،
 $[a, b] \ni t$ ، تابعا مرنا بتقطع قيمه في فضاء نظيمي X وكان المشتق
 $x'(t)$ منعدما في كل نقطة موجوده فيه، فإن $x(t) \equiv x_0$ (حيث
 x_0 عنصر ثابت من الفضاء X).

البرهان. نفرض في البداية ان $x'(t) = 0$ ايما كان داخل المجال
 $[a, b]$. نثبت نقطة $c \in (a, b)$ وعددا $0 < \varepsilon$. بما ان $x'(c) = 0$
 فإنه يوجد جوار للنقطة c تتحقق فيه المتراجحة:

$$(3) \quad |x(t) - x(c)| \leq \varepsilon |t - c|$$

نرمز بـ $T_\varepsilon(c)$ للمجموعة المؤلفة من كل العناصر $t > c$ والعناصر

$c \in [a, b]$ التي لا تحقق المتراجحة (3). ليكن $t_0 = \inf T_\varepsilon(c)$

ونفرض ان $b < t_0$. بما ان $x(t)$ مستمر فإن المتراجحة (3)
 المحققة بجوار النقطة t_0 تبقى كذلك عند النقطة t_0 نفسها. لما كان:
 $x'(t_0) = 0$ ، يوجد جوار للنقطة t_0 تتحقق فيه المتراجحة:

$$(4) \quad |x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} |t - t_0|$$

نختار $t > t_0$ تتحققه من اجله المتراجحة (4). ينتج من (3) و (4) أن:

$$\begin{aligned} |x(t) - x(c)| &\leq |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(c)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} (t - t_0) + \varepsilon (t_0 - c) = \varepsilon \left(\frac{t - t_0}{2} + t_0 - c \right) < \varepsilon (t - c) \end{aligned}$$

بجيت ان النقطة t لا تنتمي ايضا الى المجموعة $T_\varepsilon(c)$. وهذا
 يناقض المساواة $t_0 = \inf T_\varepsilon(c)$ وبالتالي $t_0 = b$ ولدينا:

$$|x(t) - x(c)| \leq \varepsilon (t - c)$$

وهذا من اجل كل $t \in [c, b]$.
 بما أن ε كفي، لدينا:

$$x(t) - x(c) = 0$$

وهذا من اجل كل $t \in [c, b]$ ، إذن $x(t) \equiv x(c)$

وهكذا يتضح ان التابع $x(t)$ ثابت على المجال (c, b) . بما اننا نستطيع اختيار النقطة c قريبة بالقدر الذي نريد من النقطة a فإن التابع $x(t)$ ثابت على كل المجال $[a, b]$.

نعتبر الآن الحالة العامة: يوجد على المجال $[a, b]$ عدد منته من النقاط، معبره انها $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ لا يقبل فيها التابع $x(t)$ مشتقا؛ إن المقدار $x'(t)$ موجود ومنعدم في كل مجال (c_j, c_{j+1}) (حيث $(j = 0, \dots, n-1)$).

يثبت الاستدلال السابق ان التابع $x(t)$ ثابت على كل مجال (c_j, c_{j+1}) $(j = 0, \dots, n-1)$. بما ان التابع $x(t)$ مستمر على المجال $[a, b]$ فإن قيمه على المجالات المتجاورة (c_j, c_{j+1}) و (c_{j-1}, c_j) متساوية؛ ومنه يأتي ان $x(t)$ تابع ثابت على كل المجال $[a, b]$. انتهى برهان النظرية.

26. 12 . المكاملة .

أ. ليكن $x(t)$ تابعا معطى على مجال مغلق $[a, b]$ قيمه في فضاء باناخى (أي نظيمي تام) X (حقيقي او عقدي). بعد تعيين تجزئة:
 $\Pi = \{a = t_0 \leq \xi_0 \leq t_1 \leq \xi_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq t_n = b\}$
 للمجال $[a, b]$ عند النقاط المعلمة ξ_0, \dots, ξ_{n-1} ، وسيطها
 $d(\Pi) = \max \Delta t_j$ ، يمكننا تشكيل المجموع التكاملي لريمان:

$$s_{\Pi}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k) \Delta t_k$$

بطبيعة الحال فإن هذا المجموع عنصر من الفضاء X . نؤكد انه إذا

كان التابع $x(t)$ مستمرا بتقطع فإن المجاميع (1) تؤول، من اجل تقسيم لا محدود للتجزئة Π ، أي من اجل $d(\Pi) \rightarrow 0$ ، نحو نهاية في X نسميها تكامل التابع $x(t)$ على المجال $[a, b]$ ونرمز لها بـ:

$$\int_a^b x(t) dt$$

ب. إن البرهان على وجود تكامل تابع مستمر بتقطع قيمة في X يعيد البرهان الوارد بخصوص تابع عددي (41.9 - 61.9). نشير هنا الى أهم مراحلها. يسمى التابع:

$$\omega_x(\delta) = \sup_{\substack{|t'-t''| \leq \delta \\ t', t'' \in [a, b]}} \|x(t') - x(t'')\|$$

تذبذب التابع $x(t)$ على المجال $[a, b]$ ؛ إن كان $x(t)$ مستمرا فإن $\omega_x(\delta) \rightarrow 0$ عندما $\delta \rightarrow 0$. كما هو الحال في 41.9 - د فإن المتراجحتين التاليتين قائمتان من اجل المجاميع التكاملية لأي تابع $x(t)$: إذا حصلنا على تجزئة Π انطلاقا من تجزئة اخرى باضافة بعض نقاط تقسيم لهذه الاخيرة فإن:

$$(2) \quad \|s_{\Pi}(x) - s_{\Pi'}(x)\| \leq \omega_x(\delta)(b-a)$$

من اجل $\delta \geq d(\Pi)$ ؛ إذا كانت Π و Π' تجزئتين كيفيتين مع $d(\Pi) \leq \delta$ ، و $d(\Pi') \leq \delta$ ، فإن:

$$(3) \quad \|s_{\Pi}(x) - s_{\Pi'}(x)\| \leq 2\omega_x(\delta)(b-a)$$

بعد اثبات المتراجحتين (2) و (3) يبقى تطبيق (من اجل $x(t)$ مستمر) الخاصية $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_x(\delta) = 0$ وكون الفضاء X تاما. اما الانتقال الى تابع مستمر بتقطع فيتم كما ورد في 61.9.

ج. يمكن، كما هو الحال في 51.9 - ج، البرهان على ان كل تابع $x(t)$ قابل للمكاملة على $[a, b]$ تابع محدود (بالنظم) بحيث ان:

$$\|x(t)\| \leq c$$

من السهل اثبات الخصائص الرئيسية التالية الخاصة بالتكامل:

$$(1) \quad \int_a^b \alpha x(t) dt = \alpha \int_a^b x(t) dt \quad (\text{حيث } \alpha \text{ عدد})$$

$$(2) \quad \int_a^b [x(t) + y(t)] dt = \int_a^b x(t) dt + \int_a^b y(t) dt$$

$$(3) \quad \int_a^b x(t) dt + \int_b^c x(t) dt = \int_a^c x(t) dt \quad (\text{حيث } a < b < c)$$

$$(4) \quad \left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \|x(t)\| (b-a)$$

$$(5) \quad \left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt.$$

نحصل عليها كلها بالانتقال الى النهاية في الخصائص المماثلة المتعلقة بالمجاميع التكاملية.

د . القيمة المتوسطة لتابع . كما هو الحال بخصوص التتابع العددية (9.51)

$$- \text{ط) يسمى المقدار.} \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt$$

من اجل تابع $x(t)$ مستمر بتقطع قيمة في فضاء باناخي X ، القيمة المتوسطة (أو الوسطى) للتابع $x(t)$ على المجال $[a, b]$. إن القيمة المتوسطة لتابع $x(t)$ حقيقي محصورة بين قيمته الصغرى والعظمى على $[a, b]$ وهي تساوي قيمة $x(t_0)$ إن كان التابع $x(t)$ مستمراً .

بخصوص تابع ذي قيم في فضاء باناخي (يمكن ان يكون ذي قيم عقدية) فإن القيمة المتوسطة قد تكون مخالفة لكل قيمة يأخذها هذا التابع

$$\text{على المجال } [a, b] \text{ . وهكذا :} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ie^{it} dt = e^{it} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

على الرغم من أن التابع ie^{it} لا يندم في مجال المكاملة .

ر . لتكن E مجموعة في فضاء شعاعي L ؛ المغلف المحدب للمجموعة E

هو، تعريفاً، المجموعة $V(E)$ المؤلفة من كل الأشعة ذات الشكل:

$$(4) \quad y = \sum_{h=1}^m \alpha_h x_h \quad (x_h \in E, \alpha_h \geq 0, \sum_{h=1}^m \alpha_h = 1, m = 1, 2, \dots)$$

إن المجموعة $V(E)$ محدبة (43.12 - ب): ذلك انه إذا كان

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1, x_h \in E, y_r \in E,$$

$$x = \sum_{h=1}^m \alpha_h x_h \in V(E), y = \sum_{r=1}^n \beta_r y_r \in V(E), \quad ;$$

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{h=1}^m \alpha_h x_h + \beta \sum_{r=1}^n \beta_r y_r = \sum_{h=1}^m \alpha \cdot \alpha_h x_h + \sum_{r=1}^n \beta \cdot \beta_r y_r$$

ينتمي هو الآخر الى $V(E)$ لأن $\alpha \alpha_h \geq 0$ ، $\beta \beta_r \geq 0$ و:

$$\sum_1^m \alpha \cdot \alpha_h + \sum_1^n \beta \cdot \beta_r = \alpha \sum_1^m \alpha_h + \beta \sum_1^n \beta_r = \alpha + \beta = 1$$

من جهة اخرى، فإن كل مجموعة محدبة P تحوي، عند احتوائها بمجموعة معطاة E ، كل الأشعة ذات الشكل (4). ينتج ذلك من اجل $m = 2$ من

التعريف نفسه لمجموعة محدبة. نواصل البرهان بالتدرج: نفرض ان هذا

صحيح من اجل كل $m - 1$ شعاعاً ونثبت صحته من اجل m شعاعاً كئيفياً

x_1, \dots, x_m في E . لدينا:

$$\begin{aligned} z &= \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m \\ &= \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}} (\alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}) + \alpha_m x_m \\ &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}) z_1 + \alpha_m x_m. \end{aligned}$$

ينتمي الشعاع z_1 الى المجموعة P حسب افتراض التدرج؛ اما النقطة

z فهي منتمة لـ P بصفتها نقطة من القطعة المستقيمة التي تصل z_1 و

x_m .

يمكن القول إذن بأن المجموعة $V(E)$ التي انشأناها هي اصغر مجموعة

محدبة تحوي E . إن كانت E نفسها محدبة فإن لدينا بطبيعة الحال

$$V(E) = E$$

س. هناك في فضاءات باناخ مجموعات محدبة غير مغلقة (يمثل مجال مفتوح من المستقيم العددي مجموعة من هذه المجموعات). بعد تعاطي مجموعة $X \supset E$ ، حيث X فضاء باناخي، يمكن تشكيل مغلفة المحدب $V(E)$ ثم ملاصقه $\overline{V(E)}$ ؛ يسمى هذا الاخير المغلف المحدب المغلق للمجموعة E . إن المجموعة $\overline{V(E)}$ محدبة؛ نلاحظ عموما ان ملاصق مجموعة محدبة هو ايضا مجموعة محدبة لأننا نستنتج من:

$$x = \lim x_n, \quad y = \lim y_n, \quad x_n \in V, \quad y_n \in V$$

ان:

$$\alpha x + \beta y = \lim (\alpha x_n + \beta y_n) \in \overline{V}$$

إن المجموعة $\overline{V(E)}$ هي اصغر مجموعة محدبة ومغلقة تحوي المجموعة المعطاة E .

ص. نظرية. إن المتوسط (د) لتابع $x(t)$ مستمر بتقطع قيمه في فضاء باناخ X ينتمي الى المغلف المحدب المغلق لمجموعة قيم $x(t)$ على المجال $[a, b]$.

البرهان ينتج من تعريف المتوسط:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt = \frac{1}{b-a} \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n x(\xi_k) \Delta t_k$$

لأن المجموع التكاملي في الطرف الايمن ينتمي الى المغلف المحدب المؤلف من قيم التابع (لأن $\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = 1$).

بخصوص المثال المعطى في د فإن متوسط التابع ie^{it} على

$[0, 2\pi]$. المساوي لـ 0 ينتمي الى المغلف المحدب المؤلف من كل قيم

التابع ie^{it} على $[0, 2\pi]$: تملأ هذه القيم الدائرة ذات نصف القطر

1، اما مغلفها المحدب فهو كل القرص المحدود بهذه الدائرة.

ط. التكاملات الموسعة. يمكن إنشاء نظرية التكاملات الموسعة المؤلفة

من التوابع ذات القيم المنتمة لفضاء باناخي على غرار حالة التوابع العددية

(الفصل 11). نشير هنا لأهم مراحلها. ليكن $x(t)$ تابعا قيمه في

فضاء باناخي X ، معرفاً على نصف المستقيم $a \leq t < \infty$ وقابلاً للمكاملة (مستمراً بتقطع مثلاً) على كل مجال $a \leq t \leq b$. التكامل الموسع من النمط الاول

$$(5) \quad \int_a^{\infty} x(t) dt$$

معرف كنهاية (باعتبار نظيم الفضاء X) التكامل:

$$(6) \quad \int_a^b x(t) dt$$

من اجل $b \rightarrow \infty$ شريطة ان تكون هذه النهاية موجودة. بصفة خاصة إذا كان التكامل المعتاد:

$$(7) \quad \int_a^{\infty} \|x(t)\| dt$$

موجوداً فإن الامر كذلك بخصوص التكامل الموسع (5)، نقول عندئذ عن التكامل (5) إنه متقارب مطلقاً؛ لدينا، زيادة على ذلك، التقدير:

$$(8) \quad \left\| \int_a^{\infty} x(t) dt \right\| \leq \int_a^{\infty} \|x(t)\| dt$$

إن وجود التكامل (5)، في حالة وجود التكامل (7)، ناتج من مقياس كوشي: لكي يكون التكامل (5) موجوداً يلزم ويكفي، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، ان يوجد عدد طبيعي N بحيث تكون المتراجحة:

$$\left\| \int_p^q x(t) dt \right\| < \varepsilon$$

محقة مهما كان $N \leq p$ و $N \leq q$.

تعمم التكاملات الموسعة من النمط الثاني والنمط الثالث بطريقة مماثلة.

36. 12. التكامل والتابع الاصيل.

أ. ليكن $x(t)$ تابعا مستمرا بتقطع على مجال $[a, b]$ قيمه في فضاء باناخي X ؛ لنثبت أن للتابع.

$$F(t) = \int_a^t x(\xi) d\xi$$

مشتقا عند كل نقطة استمرار $t = t_0$ للتابع $x(t)$ ، يساوي القيمة $x(t_0)$.

لدينا حسب قواعد المكاملة 26.12 - ج :

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t x(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t x(t_0) d\xi + \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t [x(\xi) - x(t_0)] d\xi = \\ &= x(t_0) + \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t [x(\xi) - x(t_0)] d\xi. \end{aligned}$$

ثم لدينا بفضل استمرار التابع $x(t)$ عند النقطة t_0 :

$$\left| \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t [x(\xi) - x(t_0)] d\xi \right| \leq \max_{\xi \in [t_0, t]} \|x(\xi) - x(t_0)\| \rightarrow 0$$

وهذا من اجل $t \rightarrow t_0$ ، ومنه تأتي النتيجة .

ب. نقول عن تابع $G(t)$ قيمة في فضاء باناخ X إنه تابع اصلي

للتابع $x(t)$ المستمر بتقطع إذا كان : $G'(t) \equiv x(t)$ عند كل نقطة

استمرار $x(t)$. إذا كان هناك تابعان اصليان $G(t)$ و $F(t)$

للتابع $x(t)$ فإن

$$[G(t) - F(t)]' = G'(t) - F'(t) = x(t) - x(t) \equiv 0$$

وبالتالي، بمراعاة النظرية 16.12 - ق، فإن التابع $G(t) - F(t)$ ثابت .

نرى إذن أن الفرق بين تابعين اصليين عنصر ثابت من الفضاء X . بما ان

التابع (1)، كما رأينا، تابع اصلي فإن كل تابع اصلي آخر يكتب على

$$G(t) = \int_{t_0}^t x(\xi) d\xi + x_0 \quad \text{الشكل :}$$

حيث x_0 عنصر ثابت من الفضاء X . بصفة خاصة، لدينا الدستور التالي

$$G(b) - G(a) = \int_a^b x(\xi) d\xi \quad \text{من اجل كل تابع اصلي :}$$

وهو دستور يعمم دستور نيوتن - ليبينتز .

ج. بالعكس، ليكن $G(t)$ تابعا قابلا للإشتقاق للمتغير $t \in [a, b]$

مشتقه مستمر بتقطع؛ لدينا عندئذ المساواة التالية من اجل كل t :

$$(2) \quad G(t) = G(a) + \int_a^t G'(\xi) d\xi$$

ذلك اننا إذا رمزنا مؤقتاً بـ $G^*(t)$ للطرف الايمن من (2) فإن هذا التابع، حسب أ، يقبل الاشتقاق ومشتقه هو $G'(t)$ عند كل نقطة استمرار لهذا الاخير. يتمتع التابع $G(t)$ بنفس الخاصية، إذن لدينا ثابتاً

$G^*(t) - G(t) = c_0 =$ حسب ب لأن التابعين $G^*(t)$ و $G(t)$ مستمران. لكن $G^*(a) = G(a)$ ومنه $c_0 = 0$ وبذلك اثبتنا الدستور (2).

د. لدينا من اجل التوابع العددية القابلة للإشتقاق دستور لاغرانج

$$(44.7) : \quad G(b) - G(a) = (b - a) Q$$

حيث Q عدد محصور بين اكبر قيمة للتابع $G'(t)$ على $[a, b]$ واصغرها، أي ان Q قيمة للتابع $G'(t)$ عند نقطة $t = t_0$. إن هذا الدستور يبقى قائماً من اجل تابع $G(t)$ قابل للإشتقاق قيمه في فضاء باناخى X ، إلا ان النقطة Q تنتمي في هذه الحالة الى المغلف المحدب المغلق لمجموعة القيم $G'(t)$ على $[a, b]$. ينتج ذلك مباشرة من 26.12 - ومن الدستور (2).

ر. ينتج من دستور نيوتن - ليبنيتر، كما هو الحال في 15.9 - أ،

$$\int_a^b u(t) dv(t) = u(t)v(t) \Big|_a^b - \int_a^b v(t) du(t)$$

دستور الكاملة بالتجزئة.

مع حظة ان تابعا من التابعين $u(t)$ و $v(t)$ عددي والآخر شعاعي (قيمة في الفضاء X)، وان كلا منهما مرن بتقطع.

س. نحصل، كما هو الحال في 45.9، على دستور الكاملة بتبديل

$$\int_{\tau=a}^{\beta} x(t(\tau)) t'(\tau) d\tau = \int_{t=a}^b x(t) dt$$

المتغير:

ضمن نفس الافتراضات على التابعين $x(t)$ و $t(\tau)$ والاعداد α, β, a, b .

46. 12. المشتقات ذات الرتب العالية، التفاضليات ذات الرتب العالية، دستور تايلور.

أ. إن المشتقات العالية لتابع $x(t)$ قيمه في الفضاء X معرفة، كما هو الشأن في حالة تابع عددي، بالتدرج. المشتق من الرتبة n ، تعريفاً، هو المشتق الاول من المشتق ذي الرتبة $n-1$ إن كان هذا الاخير تابع قابل للمشتق من اجل $a \leq t \leq b$ ان كل المشتقات المحصل عليها توابع شعاعية قيمها في نفس الفضاء X .

إن المشتقات ذات الرتب العالية لتابع شعاعي لها نفس الرموز المصطلح عليها في حالة تابع عددي:

$$(x'(t))' \equiv x''(t), (x''(t))' \equiv x'''(t), \dots, (x^{(n)}(t))' \equiv x^{(n+1)}(t)$$

ب. تعرف التفاضليات ذات الرتب العالية ايضا بالتدرج.

$$d^2x(t) \equiv d[dx(t)] \equiv d[x'(t)dt] = x''(t)dt^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d^{n+1}x(t) \equiv d[d^n x(t)] \equiv d[x^{(n)}(t)dt^n] = x^{(n+1)}(t)dt^{n+1}$$

خلافا للتفاضلية الاولى فإن التفاضليات ذات الرتب العالية يتغير شكلها عند الانتقال الى متغير جديد مستقل (باستثناء التبديل الخطي للمتغير).

ج. إذا وجدت كل مشتقات التابع $x(t)$ ، بما فيها المشتق من الرتبة $(n+1)$ ، من اجل $a \leq t \leq b$ فإننا نحصل على دستور تايلور:

$$\Delta x(a) \equiv x(b) - x(a) = \left\{ dx(a) + \frac{1}{2}d^2x(a) + \dots + \frac{1}{n!}d^nx(a), \right. \\ \left. + \left\{ x'(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}x''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}x^{(n)}(a) \right\} + Q_n \right.$$

بالباقى الذي يمكن كتابته على الشكل:

$$Q_n = \frac{1}{n!} \int_a^b x^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

يتم البرهان على دستور تايلور بنفس الطريقة الواردة في 25.9 - أ وهذا باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة 36.12 - ر. بالإنطلاق من عبارة الباقي نبرهن على التقدير:

$$\begin{aligned} \|Q_n\| &\leq \max_{a \leq t \leq b} \|x^{(n+1)}(t)\| \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n dt = \\ &= \max_{a \leq t \leq b} \|x^{(n+1)}(t)\| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

56.12. متتاليات وسلاسل التوابع ذات القيم المنتمية الى X .

أ. لتكن $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ متتالية توابع للمتغير $t \in [a, b]$ ، قيمها في فضاء باناخي X . يكون تابع $x(t)$ ، تعريفاً، نهاية للمتتالية $x_n(t)$ عندما $n \rightarrow \infty$ إذا تحققت العلاقة:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t) - x_n(t)\| = 0$$

وذلك من اجل كل $t \in [a, b]$. نقول عن المتتالية $x_n(t)$ إنها متقاربة بانتظام نحو النهاية $x(t)$ إذا كان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t \|x(t) - x_n(t)\| = 0$$

أي اذا استطعنا، من اجل كل $0 < \epsilon$ ، إيجاد عدد طبيعي N بحيث $n \leq N$ يستلزم $\|x(t) - x_n(t)\| \leq \epsilon$ من اجل كل $t \in [a, b]$. رأينا 69.5 ان نهاية متتالية متقاربة بانتظام من التوابع المستمرة هي ايضا تابع مستمر. هذا ولدينا النظريتان المماثلتان للنظريتين 27.9 و 77.9 المبرهن عليهما في حالة التوابع ذات القيم العددية، وهما:

ب. نظرية. إذا تقاربت متتالية $x_n(t)$ من التوابع القابلة للمكاملة بانتظام على $[a, b]$ نحو تابع $x(t)$ ، فإن $x(t)$ قابل أيضا للمكاملة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dt = \int_a^b x(t) dt \quad \text{ولدينا:}$$

بانتظام بالنسبة لـ $t \in [a, b]$. بصفة خاصة:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dt = \int_a^b x(t) dt$$

ج. نظرية. إذا تقاربت متتالية $x_n(t)$ من التوابع المرنة بتقطع عند نقطة، على الاقل، $[a, b] \ni t_0$ وكانت المتتالية $x'_n(t)$ المؤلفة من مشتقات $x_n(t)$ متقاربة بانتظام على $[a, b]$ نحو تابع مستمر بتقطع، فإن المتتالية $x_n(t)$ متقاربة بانتظام على $[a, b]$ نحو تابع $x(t)$ مرن بتقطع و: $x'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(t) = g(t)$ عند نقاط استمرار $g(t)$.

برهان هذين النظريتين اعادة لبرهاني 27.9 و 77.9.

د. نقول عن سلسلة:

$$(1) \quad x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t) + \dots$$

توابع ذات قيم في الفضاء X إنها متقاربة على مجال $[a, b]$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية

$$s_1(t) = x_1(t), \dots, s_n(t) = x_1(t) + \dots + x_n(t), \dots$$

متقاربة من اجل كل $t \in [a, b]$ ؛ تسمى نهاية المتتالية $s_n(t)$ مجموع السلسلة (1). نقول عن السلسلة (1) إنها متقاربة بانتظام على $[a, b]$ إذا كانت المتتالية $s_n(t)$ متقاربة بانتظام. من نتائج النظريتين ب و ج بعض الشروط الكافية لقابلية المكاملة حدأً حدأً وقابلية الاشتقاق لسلسلة توابع؛ نترك للقاريء مهمة صياغة هذه الشروط.

66.12. التوابع التحليلية. ليكن $x(\xi)$ تابعا قيمه في فضاء عقدي نظيمي X ، معرفا في ساحة G من المستوى العقدي $\xi = \xi + i\eta$. نقول عن هذا التابع إنه قابل للإشتقاق عند نقطة $\xi_0 \in G$ إذا وجد في الفضاء

$$x'(\xi_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(\xi_0 + h) - x(\xi_0)}{h} \quad \text{عنصر } X$$

يسمى مشتق التابع $x(\xi)$ بالنسبة للمتغير العقدي ξ عند النقطة ξ_0 . نقول عن التابع $x(\xi)$ إنه تحليلي في الساحة G إذا كان قابلا للإشتقاق بالنسبة لـ ξ عند كل نقطة $\xi_0 \in G$.

فما يخص التوابع التحليلية ذات القيم المنتمية لفضاء X ، فإن قضايا النظرية المعتادة للتوابع التحليلية (الفصل 10) تبقى قائمة. اما تعريف التكامل على طول خط من المستوى العقدي ، وهذا التكامل ضروري لوضع اسس النظرية ، فيصاغ بالطريقة المعتادة كما يلي . ليكن L سيلا مرنا بتقطع في الساحة $G : \zeta = \zeta(t)$ ، حيث t يرسم مجالا $a \leq t \leq b$ ولتكن : $\zeta_j = \zeta(t_j)$ ، $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ تجزئة للمجال $[a, b]$ هي النقاط المتوافقة لذلك من السبيل L و $(j = 0, 1, \dots, n)$

$$\int_L x(\zeta) d\zeta = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} x(\zeta_j) \Delta \zeta_j \quad \text{نضع : } \Delta \zeta_j = \zeta_{j+1} - \zeta_j$$

يرهن على وجود هذا التكامل من اجل تابع مستمر بتقطع قيمة منتمية لفضاء نظيمي تام X كما ورد في حالة تابع عددي (12.10) . من جهة أخرى . لدينا نظرية كوشي الخاصة بتابع تحليلي $x(\zeta)$: إذا كان تابع $x(\zeta)$ تحليلياً في ساحة مترابطة ببساطة G ، فإن لدينا من اجل كل حافة مغلقة L محتواة في الساحة G : $\oint_L x(\zeta) d\zeta = 0$.

نثبت انطلاقاً من نظرية كوشي دستور كوشي بالطريقة المعتادة :

$$x(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{x(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (\zeta_0 \text{ داخل } L)$$

ثم القضايا الاخرى من § 10.3 بصفة خاصة ، يقبل تابع تحليلي $x(\zeta)$ في الساحة G ، مشتقات من كل الرتب وينشر في كل قرص $Q = \{|\zeta - \zeta_0| < \rho\}$ محتو في الساحة G وفق سلسلة تايلور :

$$(1) \quad x(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\zeta - \zeta_0)^m$$

$$\text{حيث } a_m = \frac{1}{m!} x^{(m)}(\zeta_0) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

إن نصف قطر تقارب هذه السلسلة يساوي المسافة التي تفصل النقطة ζ_0 عن اقرب نقطة شاذة للتابع $x(\zeta)$ (أي النقطة التي يكف فيها التابع

(ξ) عن التمتع بخاصية الاشتقاق) ويمكن ايجاده بفضل دستور كوشي - هادامار (93.12 - ع):

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|a_m\|}$$

نحصل على المشتقات المتوالية للتابع (ξ) x باشتقاق السلسلة (1) حداً حداً:

$$x'(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (\xi - \xi_0)^{m-1},$$

.....

$$x^{(k)}(\xi) = \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\dots(m-k+1) a_m (\xi - \xi_0)^{m-k},$$

.....

§ 7.12 . المؤثرات المستمرة .

17.12 . كنا اعطينا تعريف مؤثر في 51.12 ، وقلنا أن تطبيقاً A من فضاء شعاعي X في فضاء شعاعي Y (على نفس الحقل K) مؤثر خطي إذا تحققت الشروط:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

من اجل كل x_1 و x_2 في الفضاء X مهما كان العددين α_1 و α_2 من الحقل K . إذا كان الفضاء Y وحيد البعد و $Y = K$ ، يسمى المؤثر A تابعة خطية .

نعتبر هنا المؤثرات الخطية من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y ، نفرض الآن ان X و Y حقيقيان .

أ . طبقاً للتعريف العام لتابع مستمر 11.5 - أ ، نقول عن مؤثر خطي A من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y إنه مستمر عند $x = x_0 \in X$ ، إذا استطعنا من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، ايجاد عدد $\delta > 0$ بحيث تستلزم $|x - x_0| \leq \delta$ المتراجحة $\|Ax - Ax_0\| \leq \varepsilon$ هناك كالمعتاد تعريف يكافئ التعريف السابق: يكون المؤثر A مستمراً عند $x = x_0$ إذا كان

أ. $Ax_n \rightarrow Ax_0$ (التقارب في Y) عندما $x_n \rightarrow x_0$ (التقارب في X).

ب. نقول عن مؤثر خطي A من فضاء X في فضاء Y إنه محدود إذا كان محدوداً على كرة الوحدة في الفضاء X أي إذا كان $|x| \leq 1$ يستلزم $|Ax| \leq c$ حيث c ثابت مثبت.. حينئذ تسمى الكمية:

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$$

نظيم المؤثر A. لدينا من أجل كل شعاع $x \in X$: $\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$ ومنه $\left| A \frac{x}{|x|} \right| \leq \|A\|$ وبالتالي:

$$(1) \quad |Ax| \leq \|A\| |x|$$

ج. إذا كان مؤثر خطي A محدوداً فهو مستمر عند كل نقطة x_0 من الفضاء X.

البرهان. ليكن A مؤثراً محدوداً نظيمه $\|A\|$. لدينا:

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| \leq \|A\| |x - x_0| < \varepsilon$$

وهذا من أجل $\varepsilon > 0$ معطي و $|x - x_0| < \varepsilon / \|A\|$

د. إذا كان مؤثر خطي A مستمراً، على الأقل، عند نقطة $x = x_0$ فإن A محدود.

البرهان. نبحث عن δ بحيث نجد $|Ax - Ax_0| \leq 1$ عندما $|x - x_0| \leq \delta$ ليكن $|z| \leq 1$ و $x = x_0 + \delta z$. لدينا:

$$|x - x_0| = \delta |z| \leq \delta,$$

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| = \delta |Az| \leq 1$$

$$|Az| \leq \frac{1}{\delta},$$

وهو المطلوب.

ر. نتيجة لذلك لدينا: كل مؤثر خطي مستمر على الأقل عند نقطة من الفضاء X مؤثر مستمر عند كل نقطة.

إن النظريات الثلاث التالية قائمة أيضا من اجل مؤثر مستمر A من

فضاء باناخى X في فضاء باناخى Y :

س. إذا تقاربت سلسلة $\sum_1^{\infty} x_n = s$ في الفضاء X فإن $\sum_1^{\infty} Ax_n = As$: قيمة في

ص. إذا كان $x(t)$ تابعا مستمرا بتقطع على مجال $a \leq t \leq b$ ، قيمه في الفضاء X ، فإن لدينا :

$$A \left\{ \int_a^b x(t) dt \right\} = \int_a^b [Ax(t)] dt$$

ط. إذا كان $x(t)$ تابعا قابلا للإشتقاق عند $t = t_0$ ، قيمه في الفضاء X ، فإن لدينا :

$$A [x'(t_0)] = (Ax)'(t_0).$$

يتبع برهان النظريات الثلاث اعلاه نفس الطريقة. يتعلق الامر بمجموع سلسلة وبمكاملته واشتقاقه ، وهي نتائج تأتي بفضل بعض العمليات الخطية والانتقال الى النهاية ، مع العلم ان المؤثرات الخطية المستمرة تتبادل مع العمليات الخطية كذا مع الانتقال الى النهاية ولذا فإن المؤثر A يحقق العلاقات الواردة في النظريات .

ع. إذا كانت ثلاثة مؤثرات A, A_1, A_2 من فضاء شعاعي نظمي X في فضاء شعاعي نظمي Y محدودة ، فالامر كذلك بخصوص المؤثرين $A_1 + A_2$ و αA (51.12 - ر) وهذا من اجل كل α حقيقي لأن لدينا من اجل $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |(A_1 + A_2)x| &= |A_1x + A_2x| \leq |A_1x| + |A_2x| \leq \\ &\leq \|A_1\| + \|A_2\|, \\ |\alpha Ax| &= |\alpha| |Ax| \leq |\alpha| \|A\|. \end{aligned}$$

زيادة على ذلك تبين العلاقات السابقة أن :

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\| &= \sup_{|x| \leq 1} |(A_1 + A_2)x| \leq \|A_1\| + \|A_2\|, \\ \|\alpha A\| &= \sup_{|x| \leq 1} |\alpha Ax| = |\alpha| \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = |\alpha| \|A\| \end{aligned}$$

A. إن التابع $y(\lambda)$ محدود لأن:

$$(5) \quad |A(x)| = |y(\lambda)| = \left| \int_a^b D(t, \lambda) x(t) dt \right| \leq \\ \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \cdot \int_a^b |D(t, \lambda)| dt \leq D \|x\|.$$

وهكذا فإن الدستور (4) يعرف مؤثرا من الفضاء $R^0[a, b]$ في الفضاء $R(\Lambda)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المحدودة $y(\lambda)$. نزود الفضاء

$$\|y\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} |y(\lambda)| \quad \text{الايخبر بالنظيم الطبيعي:}$$

إن المؤثر A خطي بطبيعة الحال، ينتج من المتراجحة (5) انه محدود وان نظيمه لا يتجاوز الكمية D. لنثبت ان $\|A\| = D$.

نعتبر التابع $x_n(t, \lambda) = u_n[D(t, \lambda)]$ ، حيث $u_n(\tau)$ تابع مستمر يساوي -1 من اجل $\tau \leq -1/n$ و +1 من اجل $\tau \geq +1/n$ وخطي في المجال $[-1/n, 1/n]$ (الرسم 10.12). إن التابع $x_n(t, \lambda)$ مستمر هو الآخر بالنسبة لـ t ، اما الجداء $D(t, \lambda)x_n(t, \lambda)$ فهو تابع غير سالب يساوي $|D(t, \lambda)|$ من اجل $|D(t, \lambda)| \geq 1/n$ ولا يتجاوز $|D(t, \lambda)|$ في النقاط الاخرى من اجل $\lambda \in \Lambda$ ممثبت فإن التابع $x_n(t, \lambda)$ عنصر من الفضاء $R^0(a, b)$. زيادة على ذلك:

$$A[x_n(t, \lambda)] \geq \int_{|D(t, \lambda)| \geq 1/n} |D(t, \lambda)| dt \geq \int_a^b |D(t, \lambda)| dt - \frac{1}{n}(b-a)$$

بما أن $\|x_n(t, \lambda)\| \leq 1$ لدينا:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax(t)\| \geq \sup_{n, \lambda} |A[x_n(t, \lambda)]| = \sup_{\lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)| dt$$

بمراجعة المتراجحة (5) نحصل على:

$$\|A\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)| dt$$

وهو المطلوب.

ل. ليكن $D(t)$ تابعا مستمرا لـ $t \in [a, b]$ عندئذ يعرف الدستور:

$$(6) \quad F[x] = \int_a^b D(t)x(t) dt$$

تابعية خطية في الفضاء $R^0(a, b)$ يمكن اعتبارها حالة خاصة من المؤثر في الوارد في ك، حيث ان مجموعة قيم الوسيط λ مؤلفة من نقطة واحدة.

بتطبيق النتيجة ك نحصل على: نظم التابعية (6) يساوي:

$$\|F\| = \int_a^b |D(t)| dt$$

27. 12. نظرية حول التطبيق المفتوح.

أ. ليكن $y = f(x)$ تابعا معرفا على مجموعة X قيمه في مجموعة Y . تشكل النقاط $y = f(x)$ ، حيث x يتجول في مجموعة جزئية $Q \subset X$ ، صورة المجموعة الجزئية Q التي نرمز لها بـ $f(Q)$. نسمى مجموعة كل النقاط $x \in X$ التي ينتمي من اجلها $y = f(x)$ الى مجموعة جزئية $F \subset Y$ الصورة العكسية للمجموعة الجزئية F ونرمز لها بـ $f^{-1}(F)$.

إذا كان X و Y فضاءين مترين و $y = f(x)$ تابعا مستمرا فإن الصورة العكسية $f^{-1}(G)$ لكل مجموعة جزئية مفتوحة $G \subset Y$ مجموعة جزئية مفتوحة في X (41.5 - أ).

على الرغم من ذلك فإن الصورة $f(G)$ لمجموعة مفتوحة $G \subset X$ ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة في Y . فمثلا إذا مثل X المستقيم $-\infty < x < \infty$ و Y المستقيم $-\infty < y < \infty$ وكان التابع $y = f(x)$ ثابتا فإن صورة كل مجموعة مفتوحة (كل مجموعة $G \subset X$ عموما) عبارة عن نقطة واحدة Y وهي إذن

لا تؤلف مجموعة مفتوحة في X . لو عززنا الفرض باضافة الشرط القائل ان التابع $f(x)$ يطبق الفضاء X على Y لاعتبرنا التابع المستمر المساوي لـ $(x-1)^3$ من اجل $x \geq 1$ و لـ $(x+1)^3$ من اجل $x \leq -1$ و لـ 0 من اجل $|x| < 1$ ، إن هذا التابع الذي يطبق المحور X بأكمله على المحور Y يحول المجموعة المفتوحة $\{|x| < 1\}$ الى نقطة واحدة $y = 0$.

نفرض ان التابع المستمر $y = f(x)$ يطبق تقابلياً الفضاء X في الفضاء Y نختار $D_1(a, b) = X$ الفضاء المؤلف من التتابع $x(t)$ القابلة للإشتقاق باستمرار على المجال $[a, b]$ (52.12) الموزود بمسافته الطبيعية، ونختار Y المجموعة الجزئية من الفضاء $R^0(a, b)$ ، المؤلفه من كل التتابع القابلة للإشتقاق باستمرار على $[a, b]$ (نزود $R^0(a, b)$ بمسافته الطبيعية، مع العلم ان $R^0(a, b)$ مؤلف من كل التتابع المستمرة على $[a, b]$)، من حقنا اعتبار هذه المجموعة الجزئية فضاء مترياً. نعتبر التابع $y = f(x)$ الذي يصل كل تابع $x = x(t) \in D_1(a, b)$ بالتابع نفسه $y = y(t) \equiv x(t) \in R^0(a, b)$. إن هذا التابع متقارب لأن التقارب $x_n(t) \rightarrow x(t)$ في $D_1(a, b)$ يستلزم بطبيعة الحال التقارب: $y_n(t) = x_n(t) \rightarrow y(t) \equiv x(t)$ في $R^0(a, b)$. من البديهي ان التطبيق $y = f(x)$ تقابلي. ورغم ذلك فان صورة مجموعة مفتوحة في X ، مثلا صورة كرة الوحدة المفتوحة في $D_1(a, b)$ ليست مفتوحة في Y لأن كل جوار لنقطة $y_0(t) \in f(V)$ معرف بالمتراجحة $|y(t) - y_0(t)| < \epsilon$ يحوي توابع مشتقاتها كبيرة لا نهائياً.

ب. نفهم الآن السبب الذي يجعل فروض النظرية التالية اساسية:

نظرية حول التطبيق المفتوح (باناخ). ليكن A مؤثرا خطيا مستمرا يطبق تقابلياً فضاء نظيميا تاما X على فضاء نظيمي تام Y . عندئذ يحول المؤثر A كل مجموعة مفتوحة $G \subset X$ الى مجموعة مفتوحة $f(G) \subset Y$.

البرهان. نرسم بـ V_r للكرة $\{x: |x| < r\}$. نبرهن في البداية ان

ملاصق المجموعة $A(V_1)$ في Y يحوي كرة من الفضاء Y . لدينا فرضا:

$$Y = A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(V_n)$$

ومنه $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(V_n)}$. اعتمادا على نظرية بير (57.3 - أ)، يوجد

عدد $n = N$ بحيث تحوي المجموعة $\overline{A(V_N)}$ كرة $\{y : |y - y_0| < \varepsilon\}$. بما ان المجموعة $\overline{A(V_N)}$ متوازية فهي تحوي أيضا الكرة $\{y : |y + y_0| < \varepsilon\}$. زيادة على ذلك فإن المجموعة $\overline{A(V_N)}$ محدبة (لأن كل مؤثر خطي يحول مجموعة محدبة الى مجموعة محدبة، ولأن ملاصق مجموعة محدبة مجموعة محدبة حسب 26.12 - س) وتحوي إذن الكرة $W_\varepsilon = \{y : |y| < \varepsilon\}$ المحتواة في المغلف المحدب للكرتين المذكورتين.

من الواضح، بسبب التشابه ان لدينا الاحتواء التالي من اجل كل

$p > 0$: $W_p \subset \overline{A(V_{Np/\varepsilon})}$. بصفة خاصة، لدينا: $W_{\varepsilon/N} \subset \overline{A(V_1)}$ ، وهو المطلوب.

نثبت الآن أن المجموعة $A(V_1)$ نفسها (وليس فقط ملاصقتها)

تحوي الكرة $W_{\varepsilon/(2N)}$. ليكن $y \in W_{\varepsilon/(2N)}$. بما اننا اثبتنا بأن

$W_{\varepsilon/(2N)} \subset \overline{A(V_{1/2})}$ يمكننا اختيار نقطة $y_1 \in \overline{A(V_{1/2})}$ قريبة بالقدر

الذي نريد من النقطة y . مثلا، يمكن القيام بذلك بحيث

$|y - y_1| < \varepsilon/(4N)$. نظرا لكون $W_{\varepsilon/(4N)} \subset \overline{A(V_{1/4})}$ نستطيع ايضا

ايجاد نقطة $y_2 \in \overline{A(V_{1/4})}$ بحيث $|y - y_1 - y_2| < \varepsilon/(8N)$. نواصل

بهذه الطريقة فننشئ من اجل كل $n = 1, 2, \dots$ نقطة

$y_n \in \overline{A(V_{1/2^n})}$ بحيث $|y - y_1 - y_2 - \dots - y_n| < \varepsilon/(2^{n+1}N)$.

لدينا حسب الانشاء $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$. لكن: $y_n = Ax_n$ ، حيث

$x_n \in V_{1/2^n}$ ومنه $|x_n| < 1/2^n$. لما كان الفضاء X تاما فإن السلسلة

$x_1 + x_2 + \dots$ متقاربة (73.12 - ب)، ليكن $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. ثم ان

المؤثر A مستمر وعليه $\sum_{n=1}^{\infty} Ax_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$. زيادة

على ذلك $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ وبالتالي فإن الكرة $W_{\varepsilon/(2N)}$

محتواه في صورة الكرة V_1 ، وهو ما اكدناه .

لدينا ، دائماً بسبب التشابه ، $W_\rho \subset A(V_{\rho/(2N)})$ من اجل كل $\rho > 0$.

بصفة خاصة ، ينتج من $\delta < |x - x_0|$ أن

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| < \delta\epsilon/(2N)$$

بحيث ان الصورة $A(U)$ للكرة $U = \{x : |x - x_0| < \delta\}$ تحوي الكرة

$\{y : |y - Ax_0| < \delta\epsilon/(2N)\}$ ومنه يأتي ان صورة كل مجموعة مفتوحة

$G \subset X$ مجموعة مفتوحة في Y ، بذلك ينتهي برهان النظرية .

ج . نتيجة . إذا كان A تطبيقاً مستمراً وتشاكلاً (41. 12 - ف) من فضاء

نظيمي تام X على فضاء تنظيمي تام Y فإن التطبيق العكسي A^{-1} مستمر أيضاً .

البرهان . إن المؤثر العكسي A^{-1} معرف في هذه الحالة بطريقة وحيدة

وهو بطبيعة الحال خطي مثل A . بفضل النظرية ب ، فإن الصور العكسية

بالمؤثر A^{-1} لكل مجموعة مفتوحة $G \subset X$ هي المجموعة المفتوحة $AG \subset Y$.

بصفة خاصة ، نرى ان الصورة العكسية للكرة $\{x : |x| < \delta\}$ تحوي كرة

$\{y : |y| < \delta\}$ ، وهذا يعني استمرار التطبيق A^{-1} .

د . نتيجة . إذا كان فضاء شعاعي L تاماً بالنسبة لكلا النظمين $|x|_1$ و

$|x|_2$ فإن وجود ثابت c_1 بحيث $|x|_2 \geq c_1|x|_1$ من اجل

كل $x \in L$ يستلزم وجود ثابت c_2 بحيث $|x|_1 \geq c_2|x|_2$ من اجل

كل $x \in L$ ، وبذلك يكون النظمان $|x|_1$ و $|x|_2$ متكافئين (53. 12) .

البرهان . نعتبر التطبيق المطابق A من الفضاء التنظيمي X الذي نحصل عليه

بتزويد L بالنظم $|x|_2$ على الفضاء التنظيمي Y الذي نحصل عليه

بتزويد L بالنظم $|x|_1$. إن هذا التطبيق مستمر لأن

$|x|_2 \geq c_1|x|_1$. كما ان الامر كذلك فيما يخص التطبيق العكسي

حسب الفرض و ج ؛ ومنه تأتي النتيجة المطلوبة (17. 12 - د)

ر . نفرض ان فضاء تاماً X كتب على شكل مجموع مباشر لفضائين جزئيين

مغلقتين X_1 و X_2 بحيث يكون لدينا التمثيل الوحيد التالي من اجل كل شعاع $x \in X$

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2$$

يسمى المؤثر P_1 الذي يصل كل شعاع x بمركبته X_1 المسقط (أو الاسقاط) على الفضاء الجزئي X_1 ، كما يسمى المؤثر P_2 الذي يصل كل شعاع x بمركبته x_2 المسقط (أو الاسقاط) على الفضاء الجزئي X_2 . إن هذين المؤثرين خطيان ، لكنه ليس بديهياً انها مستمران . سنرى بان المؤثرين P_1 و P_2 مستمران عند افتراض أن الفضاء X تام والفضاءين الجزئيين X_1 و X_2 مغلقتان ، وذلك باستعمال النظرية الخاصة بالتطبيق المفتوح .

بالاضافة الى النظم الاول $|x|_1 \equiv |x|$ ندخل في الفضاء X النظم

$$|x|_2 = |x_1|_1 + |x_2|_1$$

من الواضح أن $|x|_2$ يؤكد مسلمات النظم . لدينا أيضا

$$|x|_1 \leq |x_1|_1 + |x_2|_1 = |x|_2$$

لنثبت أن الفضاء X تام بالنسبة للنظم $|x|_2$. لتكن $\{x^{(n)}\}$ متتالية كوشية بالنسبة للنظم $|x|_2$ ، ينتج من المساواة

$$|x^{(n)} - x^{(m)}|_2 = |x_1^{(n)} - x_1^{(m)}|_1 + |x_2^{(n)} - x_2^{(m)}|_1$$

ان المتتاليتين $\{x_1^{(n)}\}$ و $\{x_2^{(n)}\}$ كوشيتان بالنسبة للنظم $|x|_1$.

بما أن الفضاء X تام فإن النهايتين $x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)}$ و $x_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)}$ موجودتان ، ثم إن الفضاءين الجزئيين X_1 و X_2 مغلقتان ولذا $x_1 \in X_1$ و

$x_2 \in X_2$. نضع $x = x_1 + x_2$ لدينا

$$|x - x^{(n)}|_2 = |x_1 - x_1^{(n)}|_1 + |x_2 - x_2^{(n)}|_1 \rightarrow 0$$

أي أن x هو نهاية المتتالية $\{x^{(n)}\}$ بالنسبة للنظم $|x|_2$ ، وهذا ما يبين ان X تام بالنسبة للنظم $|x|_2$. بتطبيق د نرى ان النظمين

$|x|_2$ و $|x|_1$ متكافئان، بصفة خاصة يوجد ثابت c بحيث تحقق المتراجحة:

$$|x|_2 = |x_1|_1 + |x_2|_1 \leq c|x|_1 = c|x|$$

من اجل كل $x \in X$ ، لدينا إذن في هذه الحالة:

$$|P_1x| = |x_1|_1 \leq c|x|, \quad |P_2x| = |x_2|_1 \leq c|x|$$

وهو ما يبين استمرار المؤثرين P_1 و P_2

س. ليكن X فضاء تاما مجموعا مباشرا لفضائين جزئيين مغلقين X_1 و X_2 ، وليكن P_1 و P_2 المسقطين الموافقين لـ X_1 و X_2 . نعتبر مؤثرا A_1 خطياً ومستمرًا في X_1 ومؤثرا A_2 خطياً ومستمرًا في X_2 . نعرف في الفضاء X المؤثر A حسب الدستور:

$$Ax \equiv A(x_1 + x_2) = A_1x_1 + A_2x_2.$$

من الواضح ان المؤثر A خطي. إن المؤثر A مستمر في الفضاء X ، ذلك أن:

$$Ax = A_1x_1 + A_2x_2 = A_1P_1x + A_2P_2x$$

لما كان المؤثران P_1 و P_2 محدودين في الفضاء X حسب d فإن:

$$|Ax| \leq \|A_1\| \cdot \|P_1\| \cdot |x| + \|A_2\| \cdot \|P_2\| \cdot |x| = c|x|$$

وهو المطلوب.

37. 12. تقارب متتالية مؤثرات خطية.

أ. ندخل في 17. 12 - ب التنظيم:

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$$

في الفضاء $L(X, Y)$ المؤلف من المؤثرات الخطية من فضاء نظمي X في فضاء نظمي Y .

تقارب متتالية A_1, A_2, \dots من المؤثرات نحو المؤثر A بالنسبة

لننظم السابق إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد عدد N بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\sup_{|x| \leq 1} |Ax - A_n x| \leq \varepsilon$$

مهما كان $n \geq N$

ب. لنثبت ان الفضاء $L(X, Y)$ تام عندما يكون Y تاما. لتكن A_1, A_2, \dots متتالية كوشية من المؤثرات الخطية من X في Y بحيث اننا نستطيع، من اجل كل $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد N بحيث تتحقق المتراجحة:

$$(1) \quad \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

مهما كان $n, m \geq N$. لدينا من اجل كل $x \in X$ ، حسب 17.12 - (1):

$$|A_n x - A_m x| \leq \|A_n - A_m\| |x| \leq \varepsilon |x|$$

بحيث ان الاشعة $Y \ni A_n x$ تشكل متتالية كوشية في الفضاء Y . ثم إن Y تام وبالتالي يوجد شعاع $y \in Y$ بحيث $y = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ ، نضع $y = Ax$ ونثبت ان A مؤثر خطي محدود يساوي نهاية (في الفضاء $(L(X, Y))$) المتتالية A_n . تبين المساواة:

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay \end{aligned}$$

أن A خطي. ثم إن لدينا من اجل $|x| \leq 1$:

$$(2) \quad |Ax - A_m x| = |(A - A_m)x| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(A_n - A_m)x| \leq \varepsilon$$

بفضل (1) ومن اجل $m \geq N$ ، ينتج من ذلك أن $A - A_m$ ، وبالتالي A أيضا، مؤثر محدود. اخيرا تبين المتراجحة (2) ان لدينا المتراجحة التالية من اجل $m \geq N$:

$$\|A - A_m\| \leq \varepsilon$$

وهو ما يعطي $A = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m$ من اجل تنظيم الفضاء $L(X, Y)$.

إذا كان Y هو المحور الحقيقي R_1 فإن الفضاء $L(X, Y) = L(X, R_1)$

تام. يسمى هذا الفضاء (المؤلف من كل التابعيات الخطية المستمرة على الفضاء X) الفضاء الثنوي (أو باختصار الثنوي) لـ X ونرمز له بـ X^* .

ج. بصفة خاصة، فان الفضاء $L(X, X)$ المؤلف من المؤثرات الخطية المحدودة في فضاء باناخي X فضاء تام. نرمز لـ $L(X, X)$ في المستقبل بـ $L(X)$.

د. يحدث ان تتمتع المؤثرات A, A_1, A_2, \dots بالخاصية $A_n x \rightarrow Ax$ من اجل كل $x \in X$ بدون ان يؤول $\|A_n - A\|$ الى الصفر. (سنعطي مثالا في 57.12 - ص). سنستفيد من التوطئة التالية:

توطئة. إذا كانت نظيمات المؤثرات A_1, A_2, \dots محدودة من الاعلى بنفس الثابت c وكانت العلاقة $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ محققة من اجل كل العناصر x من مجموعة Q كثيفة اينما كان في X فإن $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ مهما كان $x \in X$.

البرهان. ليكن $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ ، حيث $Q \ni x_k$. نبحث، من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، عن عدد k بحيث يكون $|x - x_k| < \varepsilon/(3c)$ ، ثم عدد N بحيث تتحقق المتراجحة $|Ax_k - A_n x_k| < \varepsilon/3$ من اجل $n \geq N$. نحصل عندئذ من اجل $n \geq N$ على:

$$\begin{aligned} |Ax - A_n x| &\leq |Ax - Ax_k| + |Ax_k - A_n x_k| + \\ &+ |A_n x_k - A_n x| \leq \|A\| |x - x_k| + \frac{\varepsilon}{3} + \\ &+ \|A_n\| |x_k - x| \leq c \frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c \frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon, \end{aligned}$$

وهذا يعني ان $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$.

نقول عن متتالية مؤثرات A_1, A_2, \dots إنها متقاربة بقوة نحو المؤثر A إذا كان $A_n x \rightarrow Ax$ من اجل كل $x \in X$ ، ويسمى المؤثر A النهاية القوية للمتتالية A_n .

47. 12 . مبدأ الحد المنتظم .

أ. نظرية (باناخ و ستينهاوس Steinhaus) . إذا شكلت نظيات متتالية مؤثرات خطية ومستمرة A_1, A_2, \dots من فضاء باناخي X في فضاء نظيمي Y ، متتالية غير محدودة:

$$\sup_n \|A_n\| = \infty,$$

فإنه توجد، في كل كرة $U_\rho(x_0) = \{x \in X : |x - x_0| < \rho\}$ نقطة x

$$\sup_n |A_n(x)| = \infty$$

بحيث:

البرهان . إن متتالية التوابع $A_1(x), A_2(x), \dots$ المحدودة كلها في الكرة: $|x| \leq 1$ ، ليست محدودة بانتظام في هذه الكرة. وبالتالي، نظرا للتشابه فهي ليست محدودة بانتظام على أية كرة $|x| \leq r$. ومنه فهذه المتتالية ليست محدودة بانتظام على أية كرة من الشكل $U_r(x_0) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$ لأنه لو كانت الاشعة $A_n(x)$ و $A_n(x_0)$ محدودة من اجل $x \in U_r(x_0)$ لكان الامر يكون كذلك بخصوص الاشعة $A_n(x - x_0) = A_n(x) - A_n(x_0)$ ، وهذا مستحيل إذ أن $x - x_0$ يرسم الكرة ذات المركز 0 ونصف القطر r ، نختار إذن في الكرة $U_\rho(x_0)$ عنصرا x_1 ($|x_1 - x_0| < \rho$) بحيث تكون قيمة شعاع من الاشعة A_n (نرمز بهذا الشعاع مؤقتا بـ A_1) لا تتجاوز، بالنظيم، الوحدة أي بحيث:

$$|A_1(x_1)| > 1$$

نبحث داخل هذه الكرة عن عنصر x_2 ومؤثر $A_2(x)$ بحيث $|A_2(x)| > 2$ ثم عن كرة اخرى $U_{\rho_2}(x_2)$ محتواة في الكرة السابقة وتحقق كل نقطة منها:

$$|A_2(x)| > 2 \quad \left(\rho_2 < \frac{1}{2} \rho_1\right)$$

نواصل هذه العملية فنصل الى متتالية كرات متداخلة انصاف اقطارها

p_1, p_2, \dots تؤول الى الصفر. لدينا بخصوص النقطة x التي تشترك فيها هذه الكرات (هذه النقطة موجودة لأن الفضاء X تام ولأن لدينا التوطئة 47.3 - د) المتراجحات التالية:

$$|A_1(x)| > 1, |A_2(x)| > 2, \dots, |A_n(x)| > n, \dots$$

وهو المطلوب.

ب. نتيجة. إذا كانت A_1, A_2, \dots متتالية مؤثرات خطية مستمرة من فضاء باناخي X في فضاء نظيمي Y ، وإذا كانت، من اجل كل شعاع x من الفضاء الباناخي X ، متتالية الاشعة A_1x, A_2x, \dots محدودة فإن نظيمات المؤثرات A_1, A_2, \dots محدودة من الاعلى بنفس الثابت.

ج. نتيجة. إذا كانت متتالية مؤثرات A_1, A_2, \dots خطية ومستمرة من فضاء باناخي X في فضاء باناخي Y ، وكانت للاشعة $y_n = A_nx$ نهاية $Y \ni y$ من اجل كل $X \ni x$ فإن التطبيق A الذي يصل كل x بـ $\lim A_nx$ تطبيق خطي مستمر من X في Y .

البرهان. ليكن x_1 و x_2 شعاعين كفيين من الفضاء X ، α_1 و α_2 ثابتان كفيان. بالانتقال الى النهاية من اجل $n \rightarrow \infty$ في المساواة:

$$A_n(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_1A_nx_1 + \alpha_2A_nx_2$$

نحصل على

$$A(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_1Ax_1 + \alpha_2Ax_2,$$

أي أن التطبيق A خطي. بما ان متتالية الاشعة A_nx متقاربة فهي محدودة من اجل كل $X \ni x$ ، ونرى إذن حسب ب، أن نظيمات المؤثرات A_n محدودة: $\|A_n\| \leq C$. لدينا إذن: $\|A_nx\| \leq C\|x\|$ من اجل كل x ، $\|x\| \leq 1$ ، وبالتالي $\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_nx\| \leq C$ ؛ وهكذا فإن المؤثر A محدود في كرة الوحدة، وبالتالي مستمر، وهو المطلوب.

زيادة على ذلك فإن متتالية المؤثرات A_n متقاربة بقوة نحو المؤثر A (37.12 - د).

د. يعطي الاستدلال السابق التقدير التالي الخاص بنظم المؤثر A :

$$\| A \| \leq \sup_n \| A_n \|$$

يمكن ان ندقق اكثر في هذا التقدير. ليكن $c = \underline{\lim} \| A_n \|$ ،
نفرض اننا نستطيع من اجل $0 < \varepsilon$ ، استخراج متتالية جزئية
 A_{n_k} ($k=1, 2, \dots$) تحقق $\| A_{n_k} \| \leq c + \varepsilon$. بما أن لدينا بطبيعة
الحال $Ax = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} x$ من اجل كل $x \in X$ فإن:

$$\| A \| \leq \sup \| A_{n_k} \| \leq c + \varepsilon$$

وهذا حسب ما سبق، لما كان ε كيفياً فإن:

$$\| A \| \leq \underline{\lim} \| A_n \|$$

في بعض الحالات الملموسة، يمكننا وضع الرمز $<$ في هذه المتراجحة
(سنرى مثلاً ضمن 57.12 - ص).

ر. توطئة. نفرض أن متتالية مؤثرات A_n متقاربة بقوة نحو مؤثر A
ومتتالية اشعة x_n متقاربة (بالنظم) نحو شعاع x . عندئذ
 $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_n$

البرهان. بفضل مبدأ الحد المنتظم، فإن نظيمات المؤثرات A_n محدودة
بثابت C . إذن:

$$\begin{aligned} | Ax - A_n x_n | &\leq | Ax - A_n x | + | A_n x - A_n x_n | \leq \\ &\leq | (A - A_n) x | + C | x - x_n | \end{aligned}$$

إن حدي الطرف الثاني متقاربان نحو الصفر عندما $n \rightarrow \infty$ ، وهو
المطلوب.

س. يمكننا في أ - ر تعويض متتالية المؤثرات A_n بتابع $A(t)$ قيمة
مؤثرية، معرف على مجموعة $T = \{t\}$ وتعويض التقارب $n \rightarrow \infty$ بالتقارب
وفق اتجاه S معرف على المجموعة T (21.4).

نعرض في الفقرات الموالية بعض التطبيقات الهامة لمبدأ الحد المنتظم.

57.12 . فضاء المتتاليات المحدودة وفضاءاته الجزئية .

أ. نرسم X للفضاء الشعاعي المؤلف من كل المتتاليات الحقيقية المحدودة: $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ المزود بالعمليتين المعتادتين (الخاصتين بالاحداثيات) وبالنظم المعرف بالدستور:

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|$$

إن مسلمات الفضاء الشعاعي التنظيمي محققة بطبيعة الحال. زيادة على ذلك فإن الفضاء X تام، نستطيع اثبات ذلك مباشرة أو بذكر النظرية الخاصة بتمام الفضاء $R^s(M)$ المؤلف من كل التوابع الحقيقية المحدودة والمستمرة على فضاء متري M (32.12 - س)، إذ أن هذا الفضاء المتري هو مجموعة الأعداد الطبيعية المزود بالمسافة المعتادة على المستقيم العددي.

ب. لتكن f_1, f_2, \dots متتالية أعداد حقيقية بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$ حينئذ تكون العبارة

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi_n$$

معرفة من أجل كل $X \ni x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ ولدينا المتراجحة:

$$(2) \quad |f(x)| \leq \sup_n |\xi_n| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

تمثل العبارة (1)، بطبيعة الحال، تابعة خطية على الفضاء X . تبين المتراجحة (2) أن هذه التابعة محدودة على كرة الوحدة في الفضاء X ، وبالتالي فهي مستمرة بالإضافة إلى ذلك يحقق تنظيمها المتراجحة:

$$(3) \quad \|f\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

نعتبر قيمة التابعة f عند الشعاع $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ ، حيث: $\xi_k = \text{sgn } f_k$ ($k = 1, 2, \dots$). نلاحظ أن الشعاع x_0 ينتمي إلى كرة الوحدة في X . لدينا:

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{sgn } f_k = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

ومنه :

$$(4) \quad \|f\| = \sup_{|x| \leq 1} |f(x)| \geq |f(x_0)| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

بمقارنة المتراجحتين (3) و (4) نرى أن :

$$(5) \quad \|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

إن التابعيات ذات الشكل (1) لا تغطي مجموعة كل التابعيات الخطية المستمرة على الفضاء X . إلا أننا إذا اعتبرنا فضاءات جزئية من الفضاء X فإن الدستور (1) يعطي الشكل العام للتابعية الخطية المستمرة. يوجد فضاء جزئي من هذه الفضاءات في ج.

ج. نرسم X_0 لمجموعة كل العناصر $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ التي تحقق $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$. من الواضح أن X_0 فضاء جزئي من الفضاء X . نشب أن هذا الفضاء الجزئي مغلق. ليكن :

$$x_m = \{\xi_n^{(m)}\} \in X_0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$x = \{\xi_n\} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m.$$

من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، نبحت عن عدد طبيعي m بحيث :

$$\|x_m - x\| = \sup_n |\xi_n^{(m)} - \xi_n| < \varepsilon/2$$

لدينا أيضا من اجل $n \gg p$ في هذه الحالة :

$$|\xi_n^{(m)}| < \varepsilon/2 \quad \text{كل } n \gg p. \quad | \xi_n | \leq |\xi_n - \xi_n^{(m)}| + |\xi_n^{(m)}| < \varepsilon, \quad \text{وهذا يعني أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$$

بما أن المجموعة X_0 مغلقة في فضاء تام X فإن الفضاء التنظيمي X_0

تام.

د. نضع الآن $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ حيث يحتل 1 الرتبة n . من

اجل كل $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in X_0$ لدينا :

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{n=1}^m \xi_n e_n\| &= \|(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots) - (\xi_1, \dots, \xi_m, 0, \dots)\| = \\ &= \|(0, \dots, 0, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots)\| \end{aligned}$$

وإذا كان العدد N مختارا من اجل $0 < \varepsilon$ معطى بحيث $|\xi_m| < \varepsilon$ من اجل $m < N$ ، فإننا نحصل على $\|x - \sum_1^m \xi_n e_n\| < \varepsilon$ ، وهكذا:

$$x = \sum_1^{\infty} \xi_n e_n$$

حيث السلسلة متقاربة بالنسبة لتنظيم الفضاء X_0 بصفة خاصة، نرى أن المجموعة المؤلفة من العناصر $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ التي لها احداثيات ξ_n منعقدة ابتداء من احداثية ما، تمثل مجموعة كثيفة ايما كان في X_0 .

ر. نفرض ان متتالية $\{f_k\}$ تجعل السلسلة $\sum_1^{\infty} f_k \xi_k$ متقاربة مهما كان $x \in X_0$ $x = \{\xi_n\}$. عندئذ تتقارب السلسلة $\sum_1^{\infty} |f_k|$ أيضا. ذلك أننا إذا اعتبرنا التابعيات الخطية:

$$\varphi_n(x) = \sum_1^n f_k \xi_k \quad (n=1, 2, \dots)$$

فإننا نلاحظ فرضا بأن لقيم هذه التابعيات نهاية لما $n \rightarrow \infty$ وذلك مهما كان $x \in X_0$. عندئذ تبين 47.12 - ب أن نظيمات هذه التابعيات φ_n محدودة من الاعلى بنفس الثابت C . نطبق (5) فنحصل من اجل كل n على المتراجحة:

$$\|\varphi_n\| = \sum_1^n |f_k| \leq C$$

ومنه يأتي تقارب السلسلة $\sum_1^{\infty} |f_k|$ ومنه يثبت الآن بأن العبارة (1) تعطي الشكل العام لتابعة خطية مستمرة على الفضاء X_0 . لتكن $f(x)$ تابعة خطية مستمرة على الفضاء X_0 . نضع $f(e_k) = f_k$ ونشكل متتالية التابعيات الخطية المستمرة $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k \xi_k$ $(n=1, 2, \dots)$. بما ان المساواة $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ محققة من اجل كل $x \in X_0$ والتابعة f مستمرة، فإن:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k$$

وهذا من اجل كل $x \in X_0$ ، نرى بذلك ان التابعة f تعمل حسب

الدستور (1) حيث السلسلة $\sum_1^{\infty} |f_k|$ متقاربة حسب ر. انتهى إذن برهان قضيتنا.

نلاحظ أيضا بأن النظم $\|f\|_0$ للتابعية f في الفضاء X_0 يساوي النظم $\|f\| = \sum_1^{\infty} |f_k|$ في X بأكمله. ذلك انه من البديهي أن $\|f\|_0 \leq \|f\|$. من جهة أخرى بتطبيق التابعية f على الشعاع:

$$X_0 \ni x_n = \{\text{sgn } f_1, \dots, \text{sgn } f_n, 0, 0, \dots\}$$

$$f(x_n) = \sum_1^n f_k \text{sgn } f_k = \sum_1^n |f_k|$$

ومنه $\|f\|_0 \geq \sum_1^n |f_k|$ من اجل كل $n=1, 2, \dots$ بحيث $\|f\|_0 \geq \sum_1^{\infty} |f_k|$. وبالتالي $\|f\|_0 = \sum_1^{\infty} |f_k| = \|f\|$ وهو ما أكدناه.

ص. نعتبر على وجه الخصوص التابعية $g_k(x) = \xi_k$ (التي تصل كل قيمة x باحداثيتها ذات الرتبة k). نحصل هذه التابعية من (1) بوضع $f_m = 0 \cdot f_k = 1$ من اجل $m \neq k$. إن نظم التابعية يساوي 1 مهما كان $k = 1, 2, \dots$. لدينا، زيادة على ذلك من اجل كل

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k \quad : \quad X_0 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$$

وهكذا فإن متتالية التابعيات g_k متقاربة بقوة نحو الصفر لما $k \rightarrow \infty$ (37.12 - د) على الرغم من نظيات هذه التابعيات ليست كذلك.

ط. نرمز بـ X_1 لمجموعة كل العناصر (ξ_1, ξ_2, \dots) القابلة للنهاية المنتهية للمتتالية ξ_n لما $n \rightarrow \infty$ تشكل المجموعة X_1 ، بطبيعة الحال، فضاء جزئيا من الفضاء X ويحوي الفضاء الجزئي X_0 والفضاء الوحيد البعد $\{\lambda e\}$ المؤلف من العناصر ذات الشكل $\{\lambda, \lambda, \lambda, \dots\}$ ، من البديهي ان X_1 هي المجموع المباشر للفضاءين الجزئيين المذكورين. إن الفضاء الجزئي X_1 مغلق في الفضاء X ، يمكننا اثبات ذلك مباشرة أو بذكر النظرية 32.12 - س مع العلم انه يمكن اعتبار X_1 كفضاء متري مؤلف من الاعداد الطبيعية $1, 2, \dots$ والرمز ∞ : مزود بمسافة تجعل

الاعداد $1, 2, \dots$ نقاطا منعزلة و $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ (راجع 53.3 - س).
 ع. هناك في الفضاء الجزئي X_1 تابعة خطية مستمرة لا تكتب على الشكل
 (1) بصفة خاصة:

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$$

لو كان بالامكان وضعها على الشكل (1) باعتبار اعداد
 f_1, f_2, \dots بحيث:

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n,$$

لحصلنا بوضع $x = e_m$ ، $L(e_m) = f_m = 0$ ($m=1, 2, \dots$) ؛

لكن ذلك يؤدي من اجل $x = e = (1, 1, \dots)$ الى

$$L(e) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 1 = 0$$

الذي يناقض : $L(e) = \lim 1 = 1$.

وهكذا فإن التابعة $L(x)$ ليست تابعة من النمط (1) الا انها نهاية

قوية (37.12 - د) لتابعيات من الشكل (1) على الفضاء X_1 : لدينا

بطبيعة الحال من اجل كل $x \in X_1$

$$L(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$$

67. 12 . جمع المتتاليات المحدودة

أ. نعلم انه توجد متتاليات محدودة وغير محدودة، مؤلفة من اعداد

حقيقية. نود هنا تعميم مفهوم النهاية لمتتالية متقاربة الى متتاليات الاعداد

الحقيقية المتباعدة بالمفهوم المعتاد. بعبارة اخرى فالامر يتعلق بوصول كل

متتالية $x = \{a_n\}$ من فضاء جزئي مغلق $X^* \supset X$ يحوى الفضاء الجزئي

X_1 المؤلف من المتتاليات المتقاربة بعدد $\text{Lim } a_n$ يسمى نهاية معممة

ويحقق الشروط الطبيعية التالية:

$$\text{Lim } (aa_n + \beta b_n) = a \text{Lim } a_n + \beta \text{Lim } b_n \quad (1)$$

كانت المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ في X^* والعددان α و β ؛

$$\text{Lim } a_n = \lim \quad (2)$$

من اجل كل متتالية متقاربة a_n ؛

(3) $\text{Lim } a_n$ تابعة محدودة ومستمرة على X^* .

ب. نعتبر، كمثال، النهاية بمفهوم سيزارو (Cesàro). النهاية بمفهوم سيزارو لمتتالية $\{a_n\}$ ، التي نرسم لها $\text{C-lim } a_n$ ، هي تعريفا النهاية المعتادة (إن كانت موجودة) لمتتالية المتوسطات الحسابية لـ a_n :

$$\text{C-lim } a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

يمكن البرهان على ان نهاية سيزارو تحقق الشروط (1 - 3) على ساحة وجودها؟ لن نتناول هذه النقطة باسهاب لأننا سنجدده اسفله نظرية اعم. نلاحظ انه قد توجد نهاية سيزارو دون وجود النهاية المعتادة فمن الواضح مثلا ان:

$$\text{C-lim } (0, 1, 0, 1, \dots) = \frac{1}{2}$$

ج. ان التابعيات من الشكل 57.12 (1) لا تصلح لإنشاء نهاية معممة لاننا لا نستطيع وضع حتى النهاية المعتادة $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ على الفضاء الجزئي X_1 على هذا الشكل (57.12 - ع). إن النهاية المعتادة هي، كما رأينا في 57.12 - ع، النهاية القوية للتابعيات الخاصة ذات الشكل 57.12 (1) علينا إذن دراسة امكانية الحصول على النهاية المعممة كنهاية قوية لتابعيات 57.12 (1) للحصول على متتالية تابعيات من هذا الشكل يجب تعاطي مصفوفة غير منتهية $T = ||t_{km}||$ ، $m = 1, 2, \dots$ تعرف سطورها التابعيات:

$$T_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} \xi_m$$

إذا كانت النهاية المعتادة لمتتالية الاعداد $T_k(x)$ موجودة لما $k \rightarrow \infty$ ، فإننا نسميها T - نهاية ونرمز لها بـ:

$$T(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = \hat{T}\text{-lim } \xi_n$$

كيف يجب ان تكون المصفوفة T لكي تكون ساحة تعريف التابعة $T(x)$ تحوى كل المتتاليات المتقاربة ولكي تتوفر الشروط (1 - 3) التي تميز نهاية معممة؟ نجد الجواب في النظرية التالية:

نظرية (توليتز Toeplitz). تكون التابعة $T(x)$ نهاية معممة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- (1) $\sum_{m=1}^{\infty} |t_{km}| \leq c$ (حيث، لا يتعلق ب k)
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} = 1$
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{km} = 0$ ($m = 1, 2, \dots$)

البرهان. لنثبت لزوم الشروط (1 - 3) إذا كانت التابعة $T(x)$ معرفة فالامر كذلك بخصوص كل التابعيات $T_k(x)$ وهذا مهما كانت المتتالية $x = \{\xi_n\}$ المتقاربة نحو الصفر. ينتج من ذلك بفضل 57.12 - د ان كل سلسلة $\sum_{m=1}^{\infty} |t_{km}|$ متقاربة. ثم، نظرية باناخ - ستينهاوس 47.12 - ب، ينتج من تقارب المتتالية $T_k(x)$ من اجل كل $x \in X_0$ ان نظيمات التابعيات T_k محدودة؛ بكتابة هذه النظيمات كما جاء في 57.12 - ب نرى ان الشرط (1) محقق. بأخذ الـ T - نهاية للمتتالية $(1, 1, \dots)$ $x =$ نرى ان الشرط (2) محقق ايضا. ونأخذ نفس النهاية للشعاع e_k (57.12) - د فنثبت الشرط (3).

نبرهن الآن على ان الشروط (1 - 3) تجعل التابعة $T(x)$ نهاية معممة إذا كانت القيمتان $T(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x)$ و $T(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(y)$ معرفتين من اجل متتايتين $x = \{\xi_n\}$ و $y = \{\eta_n\}$ ، فإن العدد:

$T(ax + \beta y) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(ax + \beta y) = a \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(y)$

معرف مهما كان الثابتان α و β ؛ وهكذا فإن ساحة التعريف X_T التابعة $T(x)$ فضاء شعاعي اما التابعة فهي خطية على هذه الساحة لدينا بخصوص هذه المتتالية $e = (1, 1, 1, \dots)$

$$T_k(e) = \sum_{m=1}^{\infty} t_{km}, \quad T(e) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(e) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} = 1$$

وهذا بفضل الشرط (2). وبالتالي إذا تحققنا من المساواة (2) الظاهري في تعريف النهاية المعممة يكفي الاقتصار على العناصر $x \in X_0$. إن التابعيات في الفضاء X_0 محدودة، بالتنظيم، بالشابست، حسب الشرط (1).

ثم لدينا من اجل العناصر $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n t_{km} \xi_m = 0$$

العناصر مجموعة كثيفة ايما كان في X_0 (57.12 - د)، وبذلك تأتي النتيجة المطلوبة من التوطئة 37.12 د. اخيرا تأتي النتيجة القائلة ان التابعة $T(x)$ محدودة على الفضاء الجزئي X_T من 47.12 - ج، يعطي 47.12 - د التقدير التالي الخاص بنظم T :

$$\|T\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |t_{kn}|$$

لما كان $Te = 1$ فان لدينا التقدير التالي للنظم:

$$\|T\| \geq 1$$

يبقى ان نبي بان الفضاء الجزئي X_T مغلق في الفضاء X . نعتبر الملاصق \bar{X}_T للفضاء الجزئي X_T . إن المجموعة X_T كثيفة ايما كان في \bar{X}_T ، التابعيات $T_k(x)$ متقاربة عند كل نقطة $x \in X_T$ ونظماها محدودة بمراعاة 37.12 - د ينتج ان التابعيات $T_k(x)$ متقاربة ايضا على \bar{X}_T . نرى أن ساحة تقارب X_T للمتتالية T_k تحوى ملاصقها \bar{X}_T ؛ إذن $\bar{X}_T = X_T$ ، وبذلك ينتهي برهان النظرية.

77.12. امثلة.

أ توافق النهاية المعتادة $\lim \xi_n$ (المعرفة على X_1 فقط) المصفوفة:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|$$

ب. إن نهاية سيزارو (67.12 - ب) معطاة بالمصفوفة:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|$$

التي تتوفر من اجلها شروط نظرية توبليتز؛ وبالتالي فإن نهاية سيزارو تتمتع بكل خاصيات النهاية المعممة.

ج. كمثال ثالث نشير الى صف مصفوفات يحوى المصفوفتين السابقتين كحالتين خاصيتين. لتكن $p_0 > 0$ ، $p_1 \geq 0$ ، $p_2 \geq 0$ ، ... متتالية و

$$P_n = \sum_{k=0}^n p_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p_1/P_1 & p_0/P_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p_2/P_2 & p_1/P_2 & p_0/P_2 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n/P_n & p_{n-1}/P_n & p_{n-2}/P_n & \dots & p_0/P_n & \dots \end{array} \right\|$$

طريقة جمع وضعها فورونوي (Voronol) نلاحظ ان الشرطين (1) و (2) من نظرية توبليتز محققة هنا مباشرة. اما الشرط (3) من اجل $m = 1$ فهو يكافئ الشرط $p_n/P_n \rightarrow 0$ لأن:

$$\frac{p_{n-m}}{P_n} \leq \frac{p_{n-m}}{P_{n-m}}$$

والشرط (3) ينتج من الشرط $p_n/P_n \rightarrow 0$ مهما كان m . وبالتالي فإن الشرط $p_n/P_n \rightarrow 0$ لازم وكاف لكي تكون مصفوفة فورونوي مصفوفة توبليتز إذا كان $p_0 = 1$ ، $p_1 = p_2 = \dots = 0$ ، فإننا نعود الى الجمع المعتاد؛ إذا كان $p_0 = p_1 = p_2 = \dots = 1$ فإننا نجد من جديد الجمع بمفهوم سيزارو.

87. 12. نشير مرة اخرى لبعض خاصيات الـ T - نهاية:

أ. يحدث، في بعض الـ T - نهايات، ان يتطابق الفضاء X_T والفضاء X_1 ، كما هو الحال في النهاية المعتادة $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. السؤال المطروح هو كيف يمكن الفصل بين هذه الحالات «القليلة الاهمية» للنهية المعممة. هناك نظرية لـ أ برودونو A. Broudno [2] نقول ان $X_T = X_1$ إذا فقط إذا وجد ثابت δ_0 بحيث تتحقق المتراجحة التالية من اجل كل

$$X \ni x = \{\xi_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(x)| \geq \delta_0 \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n|$$

الآ ان هذا الشرط صعب التحقيق. هناك ايضا شرط من المساواة $X_T = X_1$ بدلالة الاعداد t_{kn} نفسها، لكنه كاف وغير لازم (اغنيو Agnew): يكون $X_T = X_1$ إذا تحققت المتراجمة (18):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n [t_{nn} - \sum_{k \neq n} |t_{kn}|] > 0$$

ب. من جهة اخرى هل يمكن انشاء مصفوفة T تحقق $X_T = X$ ؟ إن ذلك مستحيل (راجع التمرين 8). ورغم ذلك ينتج من بعض الاعتبارات العامة انه توجد نهاية معممة $\lim \xi_n$ معرفة على كل الفضاء X وبحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+1}$ [20]؛ الآ ان مثل هذه النهاية المعممة لا يمكن تقديمها في دستور صريح.

ج. بخصوص بعض المصفوفات T فإن الكمية $T(x)$ قد تخرج من المجال $\Delta x = [\underline{\lim} \xi_n, \overline{\lim} \xi_n]$ الذي يحوي كل القيم الملاصقة للمتتالية ξ_n . يتوفر ذلك في المصفوفة التالية مثلاً:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|$$

والعنصر $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ من الطبيعي ان نطرح السؤال التالي: ما هي الشروط التي ينبغي فرضها على المصفوفة T حتى تكون كل القيم الملاصقة للمتتالية $T_1(x), T_2(x), \dots$ (من اجل $x \in X$) متممة للمجال $\Delta(x)$ ؟ نجد الجواب في النظرية التالية التي تعود الى روبنسون (Robinson) (راجع التمرين 9): تتحقق الخاصية المشار اليها آنفا إذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 1 \text{ كان}$$

8. 12. الجبور التنظيمية

18. 12. أ يسمى فضاء تنظيمي U الذي يمثل في نفس الوقت جبراً (81. 12 - أ) يسمى تنظيمياً إذا نتج عن $x_n \rightarrow x$ (بالنسبة لتنظيم U):

$$x_n y \rightarrow xy \text{ و } y x_n \rightarrow yx \text{ من اجل كل } y \in U.$$

ب. وهكذا فإن المجموعة $L(X)$ المؤلفة من كل المؤثرات المحدودة التي تعمل في فضاء باناخي X فضاء نظيمي تام (37.12 - ب) وفي نفس الوقت جبر (91.12 - ع، 17.12 - ف) نلاحظ في هذا الجبر ان النظم يحقق المتراجحة 17.12 (2):

$$(1) \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

ينتج من ذلك أن $L(X)$ جبر نظيمي: بصفة خاصة إذا كان $A_n \rightarrow A$ وكان B مؤثرا كيفيا من $L(X)$ فإن:

$$\|A_n B - AB\| = \|(A_n - A)B\| \leq \|A_n - A\| \|B\| \rightarrow 0$$

• مما يعطي $A_n B \rightarrow AB$

ج. نشير الى أن هناك متراجحة من النمط (1) قائمة في كل جبر نظيمي تام وهذا بعد الانتقال الى نظيم آخر (سرى ذلك في 88.12). ولذا يمكننا تعويض شرط استمرار الضرب « $x_n \rightarrow x$ » يستلزم $x_n y \rightarrow xy$ و $yx_n \rightarrow yx$ بشرط اقوى منه:

$$(2) \quad |xy| \leq |x| |y|$$

وهذا مهما كان x و y في U .

د. نفرض فيما يلي، اضافة الى المسلمة (2)، بأن جبرا نظيميا معتبرا يقبل وحدة e (81.12 - ج) وبأن $|e| = 1$. (إن الفرض الاخير محقق بذاته في جبر المؤثرات الخطية التي تعمل في فضاء نظيمي X ، الوحدة هنا هي المؤثر المطابق.)

28.12 أ. إن وحدة جبر نظيمي، كاي جبر، عنصر قابل للقلب لأن $ee = e$ لنثبت في جبر نظيمي تام U إن كل الكرة $\{x: |e - x| < 1\}$ مؤلفة من عناصر قابلة للقلب. نعتبر من اجل لذلك السلسلة:

$$(1) \quad y = e + (e - x) + (e - x)^2 + \dots$$

لدينا من الشرط (2): $|e - x|^n \leq |e - x|$ إذن فإن السلسلة

مقاربة حسب مقياس فيرشتراس 73.12 - ج. بضرب هذه السلسلة في $x = e - (e - x)$ نحصل على:

$$y [e - (e - x)] = \\ = [e + (e - x) + (e - x)^2 + \dots] - [(e - x) + (e - x)^2 + \dots] = e$$

وبالتالي فإن مجموع السلسلة (3) هو بالضبط العنصر المقلوب لـ x .

ب. ينتج من التقدير:

$$|e - y| = |(e - x) + (e - x)^2 + \dots| \leq \frac{|e - x|}{1 - |e - x|}$$

ان $x \rightarrow e$ يستلزم $y \rightarrow e$. يمكن القول ان مؤثر (غير الخطي) الضرب في $x^{-1} = y$ مستمر عند $x = e$.

38.12. أ. نرمز بـ 0 لمجموعة كل العناصر القابلة للقلب في جبر نظمي تام U . لنثبت ان 0 مجموعة مفتوحة في U وان المؤثر x^{-1} مستمر على كل 0 .

بما ان: $xx^{-1} = e$ ، لدينا بفضل (2) من اجل كل h بحيث $|x + h|^{-1} |x^{-1} - e| = |hx^{-1}| \leq |h| |x^{-1}| < 1$: $|h| < 1/|x^{-1}|$

بما يجعل العنصر $(x + h)x^{-1}$ قابلا للقلب حسب 28.12 - أ، اي انه يوجد عنصر $z(h)$ بحيث: $(x + h)x^{-1}z(h) = e$. عندئذ يكون $x + h$ أيضا عنصرا قابلا للقلب: عنصره المقلوب هو بطبيعة الحال العنصر $x^{-1}z(h)$. إذا كان $h \rightarrow 0$ فإن: $(x + h)x^{-1} \rightarrow xx^{-1} = e$ بحيث ان $z(h) \rightarrow e$ بفضل 28.12 - ب؛ ينتج من ذلك $(x + h)^{-1} = x^{-1}z(h) \rightarrow x^{-1}$ وهو ما يبين استمرار المؤثر x^{-1} على المجموعة 0 .

ب. رأينا أن كل عنصر قابل للقلب x ينتمي الى المجموعة 0 ولكرة نصف قطرها $r \leq 1/|x^{-1}|$. يعني ذلك أن $1/r \leq |x^{-1}|$ ؛ وهكذا عندما يقترب x من حافة المجموعة 0 فإننا نجد بالطبع $r \rightarrow 0$ ونظم العنصر x^{-1} يتزايد لا نهائيا.

12. 48. إن كل عنصر غير قابل للقلب z واقع على حافة الساحة 0 يمثل

« قاسما معما للصفير »؛ يعني ذلك وجود متتالية عناصر y_1, y_2, \dots

تحقق $0 < c \leq |y_n|$ ولا تحقق $zy_n \rightarrow 0$. نحصل على هذه المتتالية بوضع

$$y_n = x_n^{-1} / x_n^{-1} \quad \text{حيث } x_n \rightarrow z \text{ و } 0 \in x_n \text{ . حينئذ يأتي من 12. 38}$$

- ب :

$$|zy_n| \leq |(z - x_n)y_n| + |x_n y_n| \leq |z - x_n| + 1/|x_n^{-1}| \rightarrow 0$$

وهو المطلوب.

على العموم فإن القواسم المعمة للصفير لا تقبل القلب لأن إذا كان z

قابلا للقلب فإن $zy_n \rightarrow 0$ يستلزم $z^{-1}zy_n = y_n \rightarrow 0$. لكن يمكن

لعنصر غير قابل للقلب لا يساوي نهاية عناصر قابلة للقلب ألا يكون

قاسما معما للصفير (التمرين 10)

12. 58. أ. نسمي من الآن كل جبر عقدي نظمي وتام U جبر غلفاند

Gelfand (أو جبرا غلفانديا).

مهما كان العنصر x من جبر غلفاند فإن العبارة $e - \lambda x$ عنصر قابل

للقلب من اجل كل λ عقدي صغير بكفاية، مثلا من اجل

$|\lambda| < 1/|x|$ عندما $x \neq 0$ ؛ وبالتالي لدينا حسب 12. 28 - أ:

$$(1) \quad (e - \lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \dots$$

إن نصف قطر تقارب السلسلة (1) هو (12. 66):

$$(2) \quad \rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x^n|}}$$

أما في الحالة التي يكون فيها $\rho = \infty$ فالسلسلة متقاربة في كل المستوى

الذي تنتمي له λ .

إن العنصر $e - \mu x$ قابل للقلب من اجل كل $|\mu|$ كبير بكفاية،

مثلا من اجل $|x| > |\mu|$ ؛ ينتج ذلك مباشرة من الدستور

العنصر $e - \mu x = -\mu(e - \mu^{-1}x)$ تسمى مجموعة كل العناصر μ التي تجعل

العنصر $e - \mu x$ غير قابل للقلب طيف العنصر x . إن التابع

$(x - \mu e)^{-1}$ معرف على متمم الطيف. ينتج من 38.12 - أ أن هذا المتمم مجموعة G مفتوحة في المستوى الذي تنتمي له μ ، إذ إن الطيف مغلق. ثم ينتج من 38.12 - أ أن $(x - \mu e)^{-1}$ تابع مستمر لـ μ (قيمه في U) في الساحة G . لنثبت زيادة على ذلك أنه تابع تحليلي (66.12) على G . لدينا المساواة.

$$(3) \quad \left[\frac{(x - (\mu + h)e)^{-1} - (x - \mu e)^{-1}}{h} \right] (x - (\mu + h)e)(x - \mu e) = \frac{(x - \mu e) - (x - (\mu + h)e)}{h} = e$$

التي تثبت أن العنصر الموجود بين قوسين كبيرين قابل للقلب؛ مقلوبه هو $(x - (\mu + h)e)(x - \mu e)$ الذي يؤول إلى $(x - \mu e)^2$ لما $h \rightarrow 0$ ، ومنه يأتي وجود النهاية

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x - (\mu + h)e)^{-1} - (x - \mu e)^{-1}}{h} = [(x - \mu e)^2]^{-1}$$

يعني ذلك أن $(x - \mu e)^{-1}$ تابع تحليلي في الساحة G ، وهو المطلوب.

ب. نظرية. إن طيف أي عنصر x في جبر غلفاندي U مجموعة غير خالية.

البرهان. لتكن Γ دائرة في مستوى العناصر μ مركزها 0 ونصف قطرها $|x| < r$. نعتبر التكامل:

$$(5) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (x - \mu e)^{-1} d\mu$$

(الموجود بفضل استمرار التابع $(x - \mu e)^{-1}$ على الخط Γ). لنحسب I بواسطة التعويض $\mu^{-1} = \lambda$ وباستعمال النشر (1) ودساتير 33.10 - أ.

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu|=r} \mu^{-1} (e - \mu^{-1}x)^{-1} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=1/r} (e - \lambda x)^{-1} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=1/r} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m x^m \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \oint_{|\lambda|=1/r} \lambda^{m-1} d\lambda = -e$$

لو كان طيف العنصر x خاليا لكان التابع $(x - \mu e)^{-1}$ تحليليا في كل مستوى العناصر μ ويكون التكامل (5) منعدما حسب نظرية كوشي. ينتهي بذلك برهان النظرية.

ج. نتيجة. (نظرية غلفاند - مازور Gelfand - Mazur). إذا كان جبر غلفاندي U حقلا، أي إذا قبل كل عنصر منه x غير منعدم مقلوبا فإن الجبر U هو حقل الاعداد العقدية.

لرؤية ذلك نعتبر عنصرا x كيفيا من الجبر U وعددا μ من طيفه بحيث لا يكون للعنصر $x - \mu e$ مقلوب. لكن الفرض يقول ان العنصر الوحيد الذي ليس له مقلوب هو 0 ؛ إذن $x - \mu e = 0$ أي $x = \mu e$ وهو المطلوب.

68. 12. أ. نعتبر الحالة التي يكون فيها الجبر U هو الجبر $U(C_n)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية في فضاء C_n بعده منته مزود بنظم كفي (رأينا في 53. 12 - ر أن كل النظميات في C_n متكافئة). إن كل مؤثر خطي A مستمر في هذه الحالة لأن احداثيات الشعاع Ax توابع خطية، وبالتالي مستمرة، لإحداثيات الشعاع x . وهكذا فإن الجبر $U(C_n)$ مطابق للجبر $L(C_n)$ المؤلف من كل المؤثرات المحدودة في الفضاء C_n .

إن الطيف، بمفهوم التعريف 58. 12. أ، للعنصر A هو في هذه الحالة مجموعة كل القيم الذاتية للمؤثر A : ذلك ان المؤثر $A - \mu E$ يكون غير قابل للقلب إذا وفقط إذا كان: $\det ||A - \mu E|| = 0$ ؛ لكننا نلاحظ ان هذه الاخيرة هي المعادلة التي تعرف القيم الذاتية للمؤثر A . نرى ان تعريف الطيف في 58. 12 - أ يُكافيء، في الحالة الراهنة، تعريف طيف مؤثر A الوارد في 91. 12 - د. سمح لنا طيف مؤثر A في 91. 12 - د، مع مضاعفاته، بوضع جبر كل المؤثرات $P(A)$ ، بطريقة تشاكلية، على شكل جبر المدونات على طيف المؤثر A ؛ كما سمح بإنشاء تماثل غامر من الجبر $U(G)$ المؤلف من التوابع التحليلية في ساحة G تحوي الطيف على الجبر $P(A)$.

ب. إن التماثلات السابقة موجودة في حالة أي جبر غلفاندي. ليكن $S = S_x$ طيف عنصر $x \in U$ ؛ نعم ان S مجموعة غير خالية ومغلقة

ومحدودة في المستوى العقدي. ليكن $U(S)$ جبر كل التوابع التحليلية $f(\lambda)$ على المجموعة S (كل واحد منها تحليلي في ساحة تحوي المجموعة S).

نظرية. يوجد تماثل من الجبر $U(S)$ في الجبر U يحول التابع $f(\lambda) \equiv 1$ الى e والتابع $f(\lambda) \equiv \lambda$ الى العنصر x وكل متتالية توابع $f_n(\lambda)$ الى متتالية عناصر $U \ni f_n$ متقاربة بالنظيم نحو العنصر f الموافق للتابع $f(\lambda)$.

البرهان. إن التماثل المطلوب معطى بالدستور:

$$(1) \quad f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

حيث Γ حافة مغلقة تقع في الساحة التي يكون فيها التابع $f(\lambda)$ تحليليا وتحيط (مرة واحدة) بالمجموعة S . بالاعتماد على نظرية كوشي نرى ان التكامل (1) لا يتعلق باختيار هذه الحافة. يحول التطبيق (1) التابع $f(\lambda) \equiv 1$ الى العنصر e ذلك ما اثبت في 58.12 - ب؛ نبرهن بطريقة مماثلة أن التابع $f(\lambda) \equiv \lambda$ يتحول الى العنصر x . من الواضح ان الدستور (1) يعرف تطبيقا خطيا من $U(S)$ في U ؛ يجب ان نثبت بان جداء تابعين $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يتحول الى جداء العنصرين الموافقين لـ f و g .

ننتقل من المساواة:

$$(2) \quad (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} = \frac{(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1}}{\mu - \lambda}$$

الناجئة من 58.12 (3) بتعويض $\mu + h$ بـ λ . نعتبر منحنين مغلقين Γ_f و Γ_g يحيطان بالمجموعة S في الساحة التي يكون فيها التابعين $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ تحليلين بحيث يغلف المنحنى Γ_g المنحنى Γ_f بدون ان تكون لهما نقاط مشتركة. بكاملة المساواة (2)، بعد ضربها في $f(\lambda) g(\mu) / (2\pi i)^2$ ، في البداية على طول المنحنى Γ_f ثم على طول

Γ_g وبتبديل التكاملين فيما بينهما حسب 42.10 نحصل على :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) d\lambda \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} (\mu e - x)^{-1} g(\mu) d\mu = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} \frac{g(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} \right\} d\lambda + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} (\mu e - x)^{-1} g(\mu) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - \mu} \right\} d\mu. \end{aligned}$$

بما ان λ نقطة تقع داخل الساحة المحدودة بالمنحنى Γ_g فإن التكامل الاول الموجود بين حاضنتين يساوي $g(\lambda)$ ؛ ثم إن μ يقع خارج الساحة المحدودة بالمنحنى Γ_f ولذا فإن التكامل الثاني الموجود بين حاضنتين منعدم. نحصل في الختام على المساواة :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) d\lambda \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_g} (\mu e - x)^{-1} g(\mu) d\mu = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_f} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) g(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

التي تبين ان الدستور (1) يصل جداء تابعين $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ بجداء العنصرين الموافقين لـ f و g .

لنعالج المقولة الاخيرة في النظرية. نفرض ان متتالية توابع $f_n(\lambda)$ متقاربة نحو تابع $f(\lambda)$ بانتظام في ساحة G تحوي المجموعة S . نختار حافة مغلقة Γ في الساحة G ؛ لدينا التقدير :

$$\begin{aligned} \|f - f_n\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint (\lambda e - x)^{-1} [f(\lambda) - f_n(\lambda)] d\lambda \right\| \leq \\ & \leq \sup_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda) - f_n(\lambda)| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \|(\lambda e - x)^{-1}\| |d\lambda| \end{aligned}$$

ومنه يأتي $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$. انتهى البرهان.

نلاحظ ان التطبيق (1) ليس عموما تماثلا متباينا ويمكنه تحويل تابع $f(\lambda) \neq 0$ الى عنصر منعدم من الجبر U .

ج. بصفة خاصة، من اجل كل عنصر $x \in U$ فإن التوابع e^{tx} ،

$\sin tx$ ، $\cos tx$ معرفة؛ نلاحظ ان خاصيات التماثل تستلزم المساواة:

$$e^{(t_1+t_2)x} = e^{t_1x}e^{t_2x} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{C})$$

ينتج من المقولة الاخيرة في النظرية ان هذه التتابع يمكن أيضا تعريفها

$$e^{tx} = \sum_0^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}, \quad \text{بواسطة سلاسل قوي:}$$

$$\cos tx = 1 - \frac{t^2}{2!} x^2 + \frac{t^4}{4!} x^4 - \dots,$$

$$\sin tx = tx - \frac{t^3}{3!} x^3 + \frac{t^5}{5!} x^5 - \dots$$

78. 12 . يمكننا تمييز طيف كل عنصر يكتب على الشكل $f(x)$:

نظرية . إذا كان $f(\lambda)$ تابعا تحليليا على الطيف S_x لعنصر $x \in U$ فإن الطيف $S_{f(x)}$ للعنصر $f(x)$ (68. 12 - ب) يطابق مجموعة قيم $f(\lambda)$ من اجل $\lambda \in S_x$.

البرهان . ليكن $\lambda_0 \in S_x$ ، $\mu_0 = f(\lambda_0)$. إن التابع التحليلي $f(\lambda) - \mu_0$ ينعدم في $\lambda = \lambda_0$ ، وبالتالي يقبل التمثيل:

$$f(\lambda) - \mu_0 = (\lambda - \lambda_0) g(\lambda)$$

حيث $g(\lambda)$ تابع تحليلي أيضا في نفس الساحة التي يكون فيها $f(\lambda)$ تحليليا . لدينا من خاصيات تماثل f :

$$f(x) - \mu_0 e = (x - \lambda_0 e) g(x)$$

الآ انه إذا كان $f(x) - \mu_0 e$ قابلا للقلب ، فإن الامر كذلك فيما يخص $x - \lambda_0 e$ (مقلوبه هو $(f(x) - \mu_0 e)^{-1} g(x)$) وهذا يناقض الفرض . إذن $\mu_0 \in S_{f(x)}$. وبالعكس ، ليكن $\mu_0 \in S_{f(x)}$ ، يوجد عندئذ $\lambda_0 \in S_x$ بحيث $f(\lambda_0) = \mu_0$. ذلك انه إذا كان التابع

$$g(\lambda) = 1/[f(\lambda) - \mu_0] \quad \text{فإن التابع:}$$

يصبح تحليليا على المجموعة S_x ، والعنصر الموافق له $g(x) \in U$ يصبح مقلوب: $f(x) - \mu_0 e$ ، مما يناقض الفرض $\mu_0 \in S_{f(x)}$. انتهى برهان النظرية .

88. 12. نعود الى مسألة تغيير النظم في جبر U الضرب فيه مستمر (أي ان $x_n \rightarrow x$ يستلزم $x_n y \rightarrow xy$ و $yx_n \rightarrow yx$)، هدفنا من وراء ذلك توفير الشرط 18. 12 (2).

نظرية. من اجل كل جبر نظمي تام U ذي وحدة، نظيمه $|x|_1$ ، يوجد نظيم $|x|_2$ يكافيء الاول ويحقق $|e|_2 = 1$ ،
 $|xy|_2 \leq |x|_2 |y|_2$

البرهان. يولد كل عنصر x من الجبر U المؤثر A_x وهو مؤثر الضرب في x المعرف بالدستور: $A_x y = xy$. ينتج من الفرض وخصيات الجبر ان A_x مؤثر خطي مستمر. تشكل المؤثرات ذات الشكل A_x في الجبر $L(U)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية المستمرة العاملة في U ، جبراً جزئياً V يكون فيه المؤثر الواحد $E = A_e$ هو الوحدة.

لدينا بفضل خاصية تجميع الضرب:

من السهل ان نرى بأن هذه الخاصية تتميز مؤثرات الجبر الجزئي V . ذلك انه إذا كان مؤثر A يحقق $Ae = x$ وضع $A(yz) = Ay \cdot z$ و z في U ، فإن $Ae = x$ يعطينا: $Ay = A(ey) = (Ae)y = xy$ أي ان A هو مؤثر الضرب في x .

بعد اثبات هذه الخاصية نبين أن الجبر الجزئي V مغلق في الجبر $L(U)$. نفرض ان المؤثرات A_1, A_2, \dots في V متقاربة (بالنسبة لنظم $L(U)$) نحو مؤثر A . عندئذ تتقارب $A_n x$ نحو Ax من اجل كل $x \in U$. بما ان الضرب مستمر فإن لدينا:

$$A(xy) = \lim A_n(xy) = \lim (A_n x \cdot y) = \lim A_n x \cdot y = Ax \cdot y$$

ومنه يأتي حسب ما سبق، $V \ni A$.

بما أن الجبر $L(U)$ تام (37. 12 ب) فإن الجبر الجزئي V المغلق في $L(U)$ تام أيضا بوصفه فضاء نظيميا مزودا بنظم $L(U)$.

لدينا الآن نظمان في الجبر U : $|x_1|$ و :

$$\|x\|_2 = \|A_x\| = \sup_{|y|_1 \leq 1} |A_x y|_1 = \sup_{|y|_1 \leq 1} |xy|_1$$

والجبر U تام بالنسبة لكلا النظمين. ثم لدينا:

$$\|e\|_2 = \|A_e\| = \|E\| = 1, \|x\|_2 = \sup_{|y|_1 \leq 1} |xy|_1 \geq \left| x \frac{e}{|e|_1} \right|_1 = \frac{|x|_1}{|e|_1}$$

ومنه:

$$\|x\|_2 \geq c_1 \|x\|_1, c_1 = \frac{1}{|e|_1}$$

إن النظمين $|x|_1$ و $|x|_2$ متكافئان حسب 27.12 - د، وهو المطلوب.

§ 9.12. الخصائص الطيفية للمؤثرات الخطية

19.12. ينتمي كل مؤثر خطي محدود A يعمل في فضاء باناخي X الى الجبر $L(X)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية المحدودة العاملة في الفضاء X . بما أن A ينتمي لهذا الجبر فهو يملك طيفا S_A (58.12 - أ) يتألف من الاعداد العقدية λ التي لا يقبل من اجلها المؤثر $A - \lambda E$ مقلوبا محدوداً. في حالة البعد المنتهي ($X = C_n$) يرد طيف المؤثر A ، كما رأينا في 68.12 - أ، الى عدد منته، مثلا m ، من النقاط المتخالفة تمثل القيم الذاتية للمؤثر A . نعم ان الفضاء C_n يقبل حينئذ التفكيك الى مجموع مباشر لـ m فضاء جزئيا لا متغيرة يملك المؤثر A في كل واحد منها طيفا مؤلفا من نقطة واحدة، ويمكن في هذه الحالة وصف طيف A وصفا كاملا (71.12 - س). في حالة البعد غير المنتهي فإن طيف المؤثر A مجموعة متراسة غير خالية من المستوى محتواة في القرص $|\lambda| \leq \|A\|$ ، أو على وجه التحديد، في القرص $|\lambda| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ (58.12 - أ)؛ لا يمكن الاتيان بمعلومات اوفر في الحالة العامة (راجع التمرين 11 حيث ننشي مؤثر طيفه مجموعة متراسة كيفية من المستوى).

29.12. أ. قد نجد في حالة البعد غير المنتهي عناصر λ من طيف المؤثر A التي لا تمثل قيا ذاتية لـ A . بل يمكننا القول في هذه الحالة ان المفهوم

الذي يصبح طبيعيا ليس مفهوم القيمة الذاتية. بل مفهوم القيمة الذاتية المعممة: القيمة الذاتية المعممة هي، تعريفاً، عدد λ يقبل متتالية اشعة x_1, x_2, \dots تحقق: $0 < c \leq |x_n|$ و $Ax_n - \lambda x_n \rightarrow 0$. من الواضح ان كل قيمة ذاتية لمؤثر هي قيمة ذاتية معممة لهذا المؤثر. إن كل قيمة ذاتية معممة لمؤثر A تنتمي الى طيفه؛ ذلك ان إذا كان $Ax_n - \lambda x_n \rightarrow 0$ بخصوص متتالية x_n وكان المؤثر $A - \lambda E$ يقبل مقلوبا محدودا فإن $x_n = (A - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E)x_n \rightarrow 0$

ب. نثبت الآن ان كل نقطة على حافة طيف مؤثر A تمثل قيمة ذاتية معممة. لتكن A نقطة واقعة على حافة الطيف؛ بما أن $A - \lambda E$ يُساوي نهاية المؤثرات القابلة للقلب: $A - \mu E$ ، حيث $\mu \in S_A$ ، فإن المؤثر المؤثر $A - \lambda E$ قاسم معمم للصفر بفضل 48.12، توجد إذن متتالية مؤثرات P_n تحقق $0 < c \leq \|P_n\|$ ، لكن: $(A - \lambda E)P_n \rightarrow 0$ في الجبر $L(X)$. من اجل كل مؤثر P_n نختار شعاعا y_n بحيث $|y_n| = 1$ ، $|P_n y_n| \geq c/2$. بوضع $x_n = P_n y_n$ نجد: $|x_n| \geq c/2$ وكذا: $|x_n| \geq c/2$ و $(A - \lambda E)x_n = (A - \lambda E)P_n y_n \leq \|(A - \lambda E)P_n\| |y_n| \rightarrow 0$ وهو المطلوب.

أما فيما يخص النقاط الداخلية لطيف مؤثر A فهي ليست بالضرورة نقاطا ذاتية معممة (التمرين 10).

39.12. تسهل النظرية التالية أحيانا دراسة المؤثرات:

نظرية. نفرض ان الطيف S_A لمؤثر A اتحاد لمجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين S_1 و S_2 . حينئذ يكون الفضاء X قابلا للتفكيك الى مجموع مباشر لفضائين جزئيين مغلقين X_1 و X_2 لا متغيرين بواسطة A بحيث ان طيف A باعتباره على الفضاء الجزئي X_1 هو المجموعة S_1 ، وطيف A باعتباره على الفضاء الجزئي X_2 هو S_2 .

البرهان. نستعمل التمثل من الجبر $U(S_A)$ المؤلف من التوابع التحليلية

على S_A في الجبر $L(X)$ الوارد ضمن 68.12 - ب. يعرف الدستور
68.12 (1) هذا التامثل، وهو:

$$f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda E - A)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

حيث Γ منحن مغلق يحيط بالمجموعة S_A في الساحة التي يكون فيها التابع
 $f(\lambda)$ تحليلياً. في الحالة التي تكون فيها المجموعة S_A اتحاداً لأجزائه
المغلقة وغير المتقاطعة متنى متنى فقد يكون الامر كذلك فيما يخص المنحنى
 Γ . اما في الحالة الراهنة فإن المجموعة S_A اتحاد مجموعتين مغلقتين S_1 و
 S_2 بدون نقاط مشتركة والمنحنى Γ يمكن ان يتألف من منحنيين مغلقين
 Γ_1 و Γ_2 ، يحيط أولهما بالمجموعة S_1 وثانيهما بـ S_2 .

إن التابع $e_1(\lambda)$ المساوي لـ 1 على المجموعة S_1 و لـ 0 على S_2
ينتمي الى الجبر $U(S_A)$ ؛ يضم الجبر $U(S_A)$ ايضا التابع $e_2(\lambda)$
المساوي لـ 0 على المجموعة S_1 و لـ 1 على S_2 . يتسع هذان التابعان
بالخصائص البديهية التالية:

$$e_1(\lambda) + e_2(\lambda) \equiv 1 (\text{sur } S_A)$$

على

$$e_1^2(\lambda) = e_1(\lambda)$$

$$e_2^2(\lambda) = e_2(\lambda), \quad e_1(\lambda) e_2(\lambda) = e_2(\lambda) e_1(\lambda) = 0$$

نرمز بـ E_1 و E_2 للمؤثرين الخطيين الموافقين على التوالي للتابعين
 $e_1(\lambda)$ و $e_2(\lambda)$. بمراعاة خاصيات التامثلات يأتي.

$$E_1 + E_2 = E, \quad E_1^2 = E_1, \quad E_2^2 = E_2, \quad E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0$$

لتكن X_1 مجموعة الحلول (في الفضاء X) للمعادلة $E_1 x = x$ و X_2
مجموعة حلول المعادلة $E_2 x = x$. بصفة خاصة فإن أي شعاع من الشكل
 $x = E_1 y$ حل، من اجل كل y ، للمعادلة $E_1 x = x$ لأن
 $E_1(E_1 y) = E_1^2 y = E_1 y$ من الواضح أن X_1 و X_2 فضاءان
جزئيان من الفضاء X ، مغلقان بفضل استمرار المؤثرين E_1 و E_2 .
إذا كان $z \in X_1 \cap X_2$ فإن $z = E_1 z = E_2 z$ ؛ لكن

وهكذا فإن $z = E_1 z = 0$ ومنه $E_1 z = E_1 (E_1 z) = E_1 (E_2 z) = 0$
تقاطع الفضاءين الجزئيين X_1 و X_2 لا يحوي سوى الشعاع المنعدم.
بتطبيق المؤثر $E = E_1 + E_2$ على شعاع y كفي نجد $y = E_1 y + E_2 y$ ،
حيث ينتمي الطرف الايسر الى X_1 والطرف الثاني الى X_2 . وبالتالي فإن
الفضاء X مفكك الى مجموع مباشر من الفضاءات الجزئية X_1 و X_2 .
ليكن $x \in X_1$. عندئذ $Ax = A (E_1 x) = E_1 (Ax)$ ، إذن ينتمي Ax
ايضا الى الفضاء الجزئي X_1 ، وبالتالي فإن X_1 لا متغير بواسطة المؤثر A .
بطريقة مماثلة فإن X_2 لا متغير بواسطة A .
يبقى أن نبرهن على نتيجة النظرية. نضع $A_1 = AE_1$ ؛ إن A_1 و A
متطابقان على الفضاء الجزئي X_1 ، و A_1 منعدم على X_2 . من جهة اخرى
يمكن كتابة:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda e_1(\lambda) (\lambda E - A)^{-1} d\lambda$$

يمكننا هنا تعويض المنحنى Γ بـ Γ_1 لان التابع $e_1(\lambda)$ منعدم على
المنحنى Γ_2 . بعد ذلك يمكن تعويض التابع $e_1(\lambda)$ بـ 1 ؛ نحصل في
الختام على:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \lambda (\lambda E - A)^{-1} d\lambda$$

ثم مهما كان μ لدينا:

$$A_1 - \mu E_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu) (\lambda E - A)^{-1} d\lambda$$

نفرض ان μ خارج المنحنى Γ_1 ، ننشئ المؤثر:

$$Q_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{(\lambda E - A)^{-1} d\lambda}{\lambda - \mu}$$

تعطينا نفس الاستدلالات الواردة في 68.12 - ب

$$\begin{aligned} (A_1 - \mu E_1) Q_\mu &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu) \frac{(\lambda E - A)^{-1} d\lambda}{\lambda - \mu} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda E - A)^{-1} d\lambda = E_1. \end{aligned}$$

وبالتالي نرى ان المؤثر $A - \mu E$ قابل للقلب في الفضاء الجزئي X_1 . إذن لا يمكن لطيف المؤثر A في الفضاء الجزئي X_1 ان يحتوي اكثر من نقاط المجموعة S_1 . كما ان طيف المؤثر A في X_2 لا يحوى اكثر من نقاط S_2 . لنثبت أن طيف A في X_1 يحوى كل نقاط المجموعة S_1 . ليكن $\lambda_0 \in S_1$. رأينا ان المؤثر $A - \lambda_0 E$ قابل للقلب في الفضاء الجزئي X_2 ، ومنه يوجد مؤثر Q_2 يحقق $(A - \lambda_0 E) Q_2 y = y$ من اجل كل $y \in X_2$ ؛ لو كان المؤثر $A - \lambda_0 E$ قابلا للقلب في الفضاء الجزئي X_1 يوجد مؤثر Q_1 يحقق $(A - \lambda_0 E) Q_1 x = x$ من اجل كل $x \in X_1$. حينئذ ننشئ مؤثرا Q يطابق Q_1 في X_1 و Q_2 في X_2 ويمكن تمديده خطيا على كل X . بفضل 27.12 - س فإن Q يصبح حينذاك مؤثرا خطيا محدودا من الفضاء X . من الواضح أنه يصبح في نفس الوقت مقلوب $A - \lambda_0 E$. لكن هذا مستحيل لأن $\lambda_0 \in S_A$. انتهى برهان النظرية.

49. 12 . المؤثرات المتراسة . يمكن ابراز ، من بين المؤثرات العاملة في فضاء نظيمي ، صنف هام من المؤثرات خاصياتها هي اقرب لخاصيات المؤثرات في فضاء ذي بعد منته .

أ . تعريف نقول عن مؤثر خطي A يعمل في فضاء نظيمي X إنه متراس إذا حول كل مجموعة محدودة $Q \subset X$ الى مجموعة شبه متراسة (39.3 أ) .
 ب . إن كل مؤثر خطي في فضاء ذي بعد منته مؤثر متراس .
 ج . يعتبر مؤثر فريدولم (89.12) مثالا لمؤثر متراس في الفضاء $C^s(a, b)$.

د . إن المؤثر المطابق E في فضاء ذي بعد غير منته مؤثر غير متراس لأنه يحول كرة الوحدة الى الكرة نفسها اي الى مجموعة ليست شبه متراسة (63.12 ب) .

59. 12 . عمليات على المؤثرات المتراسة .

أ . إن المجموع $A_1 + A_2$ لمؤثرين متراسين A_1 و A_2 مؤثر متراس لرؤية

ذلك نعتبر مجموعة محدودة $Q \in X$ ومتتالية نقاط $\{x_n\}$ من Q . بما ان المؤثر A_1 متراس يمكننا استخراج من المتتالية $\{x_n\}$ متتالية جزئية $\{x_{n'}\}$ بحيث تكون $\{A_1 x_{n'}\}$ متتالية كوشية، كما يمكننا استخراج متتالية جزئية $\{x_{n''}\}$ من $x_{n'}$ بحيث تكون المتتالية $\{A_2 x_{n''}\}$ كوشية؛ حينئذ تكون $\{(A_1 + A_2)x_{n''}\}$ متتالية كوشية، وهو المطلوب.

ب. إن جداء مؤثر متراس A في اي مؤثر محدود B (ترتيب الجداء ليس ذا اهمية) مؤثر متراس.

لرؤية ذلك نعتبر مجموعة محدودة $Q \in X$ ؛ إن BQ محدود ايضا، إذن ABQ شبه متراس؛ ومنه يأتي تراص المؤثر AB . من جهة اخرى يحول المؤثر B كل متتالية كوشية الى متتالية كوشية وبالتالي فهو يحول المجموعة شبه المتراسة AQ الى مجموعة شبه متراسة؛ إذن BA مؤثر متراس ايضا.

ج. بصفة خاصة إذا كان المؤثر المتراس A قابلا للقلب فإن الفضاء X ذو بعد منته.

ذلك ان المؤثر $E = AA^{-1}$ متراس حسب ب ويمكننا تطبيق 49.12 - د

د. إذا كان لدينا من اجل كل $n = 1, 2, \dots$ مؤثر متراس A_n وكان لدينا مؤثر A بحيث $\|A - A_n\|$ فإن A مؤثر متراس.

ذلك ان من اجل $\varepsilon > 0$ معطى فإن المجموعة $A_n Q$ (حيث Q مجموعة محدودة كيفية محتواة في كرة $|x| \leq r$ و $\|A - A_n\| < \varepsilon$) مجموعة شبه متراسة تمثل εr - شبكة من اجل المجموعة AQ . ينتج من ذلك ان AQ شبه متراسة (59.3) وان المؤثر A متراس.

69.12. طيف مؤثر متراس.

أ. توطئة. من اجل مؤثر متراس في فضاء باناخي X فإن كل قيمة ذاتية معممة غير منعدمة قيمة ذاتية معتادة.

البرهان. لتكن λ قيمة ذاتية معممة للمؤثر المتراس A اي انه توجد

. متتالية $0 < C \leq |x_n|$ ، x_1, x_2, \dots بحيث $(A - \lambda E)x_n = q_n \rightarrow 0$ توجد، بفضل شبه تراص المجموعة $\{Ax_n\}$ ، متتالية اعداد طبيعية n_1, n_2, \dots بحيث تكون للاشعة Ax_{n_k} نهاية في الفضاء X ؛ نضع $z = \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k}$ عندئذ تؤول المتتالية: $\lambda x_{n_k} = Ax_{n_k} - q_{n_k}$ ايضا الى z ؛ بصفة خاصة: $|z| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda x_{n_k}| \geq |\lambda| C > 0$ ، ثم، بمراجعة كون $\lambda \neq 0$ ؛ نصل بالتالي الى المساواة $z = \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = (1/\lambda) Az$ ، $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = z/\lambda$ التي تثبت التوطئة. $Az = \lambda z$.

ب. توطئة. لايقبل مؤثر متراص A خارج كل قرص $c \geq |\lambda|$ (حيث $0 < c$) اكثر من عدد منته من القيم الذاتية المختلفة.

البرهان. ليكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ قبا ذاتية مختلفة للمؤثر A تحقق $|\lambda_n| \geq c$. لتكن e_1, e_2, \dots الاشعة الذاتية الموافقة لها على التوالي: $Ae_n = \lambda_n e_n$ حيث $n = 1, 2, \dots$. إن الاشعة الذاتية الموافقة لقيم ذاتية

مختلفة مستقلة خطياً (51.12 ك)؛ وبالتالي فإن المغلف الخطي L_{n-1} للأشعة e_1, \dots, e_{n-1} فضاء جزئي ذاتي للمغلف الخطي L_n للأشعة e_1, \dots, e_n . يوجد، حسب التوطئة 63.12 - أ، شعاع $h_n \in L_n \setminus L_{n-1}$ يحقق: $|h_n| = 1$ و $|h_n - x| > 1/2$ من اجل كل $x \in L_{n-1}$. يمكننا وضع $h_n = x_0 + \alpha e_n$ حيث $h_n \in L_n \setminus L_{n-1}$ لدينا عندئذ.

$$Ah_n = A(x_0 + \alpha e_n) = Ax_0 + \alpha \lambda_n e_n = Ax_0 + \lambda_n (h_n - x_0) = (Ax_0 - \lambda_n x_0) + \lambda_n h_n.$$

بما ان: $Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0 \in L_{n-1}$ يأتي:

$$|Ah_n - Ah_{n-1}| = |(Ax_0 - \lambda_n x_0 - Ah_{n-1}) + \lambda_n h_n| = |\lambda_n| \left| h_n - \frac{1}{\lambda_n} (Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0) \right| \geq |\lambda_n| \cdot \frac{1}{2},$$

وبذلك نرى انه يستحيل استخراج متتالية جزئية متقاربة من المتتالية Ah_n . وهذا يناقص تراص المؤثر A . انتهى برهان التوطئة.

ج. توطئة. لايقبل مؤثر متراص A في فضاء باناخي X خارج كل قرص

$|\lambda| \leq c$ (حيث $c > 0$) أكثر من عدد منته من نقاط الطيف؛ وتمثل هذه النقاط قيما ذاتية للمؤثر A .

البرهان. إن كل نقطة على حافة الطيف للمؤثر A قيمة ذاتية معممه (29.12. ب) إذن فهي قيمة ذاتية معتادة حسب التوطئة أ؛ وبالتالي ينتج من التوطئة ب ان المؤثر المتراص A لا يقبل خارج القرص c . $|\lambda| \leq c$ سوى عدد منته من النقاط على حافة الطيف. نرسم هذه النقاط بـ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، انها قيم ذاتية للمؤثر A حسب التوطئة. نؤكد بعد ذلك على ان هذه النقاط تنفذ كل نقاط طيف A الواقعة خارج القرص c . $|\lambda| \leq c$. لو بقيت في الطيف نقطة λ_0 ، $|\lambda_0| \geq c$ فإننا نستطيع تمرير مستقيم على λ_0 يذهب نحو اللانهاية ولا يمر بالقرص c $|\lambda| \leq c$ ولا بالنقاط $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ؛ إن النقطة الاخيرة من الطيف على هذا المستقيم تنتمي عندئذ الى حافة الطيف بدون ان تتطابق مع اية نقطة من النقاط $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. يبين التناقض المحصل عليه التوطئة.

د. لما كان خارج اي قرص c $|\lambda| \leq c$ لا يحوى، حسب التوطئة ج، سوى عدد منته من نقاط طيف مؤثر متراص فإنه يمكن ترقيم كل نقاط الطيف حسب الترتيب التناقصي لطويلاتها. نرى بذلك ان طيف مؤثر متراص في فضاء باناخى يمثل مجموعة على الاكثر قابلة للعد من القيم الذاتية المنعزلة و 0 هو نقطة النهاية الوحيدة. ان النقطة 0 تمثل في حالة مؤثر متراص في فضاء بعده غير منته نقطة من الطيف (59.12 - ح) (ليست بالضرورة قيمة ذاتية؛ اما النقاط الاخرى من الطيف فتشكل مجموعة قابلة للعد أو منتهية أو خالية إن كانت هذه المجموعة خالية فإن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0$) (58.12 - أ) والمؤثر A عديم القوة ومعمم. اما مماثل هذا المؤثر في حالة

فضاء ذي بعد منته فهو مؤثر عديم القوة يحقق $A^m = 0$ مها كان m يمكن في فضاء ذي بعد منته وصف بنية مؤثر عديم القوة وصفا كاملا (إنه معطى ضمن اساس معين بمصفوفة جورדانية عناصر قطرها معدومة كلها). فيما

يتعلق بحالة البعد غير المنتهي فإن بنية مؤثر عديم القوة ومعهم لم تدرس دراسة وافية (1).

79. 12 . التفكيك الطيفي لمؤثر متراص .

أ. لتكن $\lambda \neq 0$ نقطة من الطيف S_A لمؤثر متراص A ؛ بما ان هذه النقطة منعزلة حسب 69. 12 - ج يمكننا تطبيق النظرية 39. 12 . إن الفضاء X يقبل عندئذ التفكيك الى مجموع مباشر لفضاءين جزئيين مغلقين P_λ و Q_λ لامتغيرين بواسطة المؤثر A بحيث يتكون طيف A في P_λ من العدد λ فقط ويتكون طيفه في Q_λ من S_A عدا النقطة λ . من الواضح ان المؤثر A يبقى متراصا في كلا الفضاءين الجزئيين P_λ و Q_λ ؛ بما ان 0 لا ينتمي لطيف A في P_λ فإن A يقبل القلب في P_λ . يعني ذلك ان الفضاء P_λ ذو بعد منته (59. 12 - ج) . وبالتالي فإن كل نقطة $\lambda \neq 0$ من طيف المؤثر A تعرف فضاء جزئيا لا متغير بعده منته ؛ مع الاشارة الى ان بنية المؤثر A في هذا الفضاء تتعين طبعاً بالوسائل المعروفة .

ب. نستنتج من أ خاصية هامة للمؤثرات المتراصة وهي :

متناوبة فريدولم . هناك ، من اجل عدد عقدي μ معطى ، حالتان لا ثالثة لهما : اما ان يكون للمعادلة $(E - \mu A)x = y$ حل وحيد بالنسبة لـ x مها كان $y \in X$ ، واما ان تقبل المعادلة المتجانسة : $(E - \mu A)x = 0$ حلا غير منعدم .

البرهان . من الواضح ان الحالة الاولى هي المحققة عندما $\mu = 0$. ليكن إذن $\mu \neq 0$ و $\lambda = 1/\mu$ ؛ حينئذ تكون المعادلة $(E - \mu A)x = y$ مكافئة

للمعادلة $(A - \lambda E)x = -\lambda y$. إذا لم ينتم λ الى طيف المؤثر A فإن $A - \lambda E$ يقبل القلب وبالتالي تتحقق الحالة الاولى في النظرية ؛ اما إذا انتمى λ الى طيف A فإن λ قيمة ذاتية لـ A لأن $\lambda \neq 0$ (69. 12 - ج) ونحصل حينئذ على الحالة الثانية من النظرية .

وهكذا فإن متناوبة فريدولم تكافئ ما يلي: بخصوص المؤثر A فإن كل عدد $\lambda \in S_A$ غير منعدم قيمة ذاتية. كنا راينا ان تلك هي خاصية المؤثرات المتراسة؛ لكنه يوجد صنف واسع من المؤثرات التي تتمتع بهذه الخاصية (مثلا المؤثرات التي لها قوة كيفية متراسة؛ راجع التمرين 13).

12. 89. مؤثر فريدولم التكاملي. ليكن $q(s, t)$ تابعا عقديا مستمرا لمتغيرين حقيقيين s و t يتغيران في نفس المجال $[a, b]$. يمثل التكامل:

$$(1) \quad y(t) = \int_a^b q(s, t) x(s) ds,$$

من اجل كل تابع $x(t)$ مستمر على $[a, b]$ تابعا معرفا دوما على $[a, b]$ ومستمرا بفضل 18.9. من البديهي ان الدستور (1) يعرف مؤثراً خطياً $y = Ax$ يعمل في الفضاء $C^0[a, b]$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة على $[a, b]$ المزود بالنظيم $\|x\| = \sup |x(t)|$ (12. 93 - ب)؛ يسمى هذا المؤثر مؤثر فريدولم. ينتج من المتراجحة:

$$\|y(t)\| \leq \sup |x(s)| \int_a^b |q(s, t)| ds$$

ان المؤثر A محدود وان نظيمه لا يتجاوز العدد:

$$\sup_t \int_a^b |q(s, t)| ds$$

لنثبت ان المؤثر A متراس. نفرض ان التابع $x(t)$ يتجول في مجموعة

محدودة $Q \ni C^0[a, b]$ بحيث، مثلاً: $\|x\| = \sup |x(t)| \leq r$.

عندئذ نجد من اجل δ $|t' - t''| \leq \delta$ ان:

$$\begin{aligned} |y(t') - y(t'')| &\leq \sup |x(t)| \int_a^b |q(s, t') - q(s, t'')| ds \leq \\ &\leq \sup |x(t)| \omega_q(\delta) (b - a), \end{aligned}$$

$$\omega_q(\delta) = \sup_{|t' - t''| \leq \delta} |q(s, t') - q(s, t'')|$$

حيث:

ينتج من ذلك التقدير التالي للتذبذب $\omega_y(\delta)$ للتابع $y(t)$:

$$\omega_y(\delta) \equiv \sup_{|t' - t''| \leq \delta} |y(t') - y(t'')| \leq r \omega_q(\delta) (b - a)$$

ان هذا التقدير لا يتعلق باختيار التابع $x(t) \in Q$ ؛ بما ان التابع $q(s, t)$ مستمر لدينا : $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_q(\delta) = 0$ ، إذن $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_y(\delta) = 0$. وهكذا فإن المجموعة $AQ \supset C^s(a, b)$ محدود بانتظام ومتساوي الاستمرار؛ يتبين من نظرية ارزيبلا (42.12 - ظ - ج) أن المجموعة AQ شبه متراسة من اجل كل $Q \ni C^s(a, b)$ محدود؛ وبالتالي فإن المؤثر A متراص، وهو المطلوب.

نستخلص إذن صحة كل القضايا 69.12 - 79.12 من اجل مؤثر فريدولم بصفة خاصة نرى صحة متناوبة فريدولم (79.12 - ب) التي تأخذ في الحالة الراهنة الشكل التالي:

هناك من اجل عدد عقدي μ معطى حالتان لا ثالثة لهما: اما ان يكون للمعادلة:

$$x(t) - \mu \int_a^b q(s, t) x(s) ds = y(t)$$

حل وحيد بالنسبة لـ $x(t)$ من اجل كل تابع $y(t) \in C^s(a, b)$ ، واما ان تقبل المعادلة المتجانسة:

$$x(t) - \mu \int_a^b q(s, t) x(s) ds = 0$$

حلا غير منعدم

99.12 . مؤثر فولتيرا التكاملي . ليكن $q(s, t)$ تابعا مستمرا لمتغيرين s و t في نفس المجال $[a, b]$. يختلف التكامل:

$$(1) \quad z(t) = [Vx](t) = \int_a^t q(s, t) x(s) ds$$

عن التكامل (1) 89.12 في كون الحد الثابت b للتكامل استبدل بالحد المتغير t . إن التابع $y(t)$ معرف، كما هو الحال في (1) 99.12 ، ومستمر في $[a, b]$ (68.9 - أ). يسمى المؤثر الخطي V المعطى بالدستور (1) مؤثر فولتيرا (Volterra) . إن مؤثر فولتيرا مثل مؤثر فريدولم، مؤثر متراص؛ نبين ذلك بنفس الطريقة مع التدقيق

شيئا ما في المتراجحات. لكن خلافا لمؤثر فريدولم، فإن طيف مؤثر فولتيرا لا يمكن ان تكون له نقاط غير منعدمة (اي نقاط ذاتية كما رأينا). لرؤية ذلك نفرض العكس: من اجل $\lambda \neq 0$ ، يوجد تابع $x_0(t) \in C^s(a, b)$ بحيث:

$$(2) \quad \forall x_0(t) \equiv \int_a^t q(s, t) x_0(s) ds = \lambda x_0(t)$$

بوضع $t = a$ نجد $\lambda x_0(a) = 0$ إذن $x_0(a) = 0$ بدون المس بعمومية المسألة يمكن افتراض ان التابع $x_0(s)$ لا يساوي الصفر في اي جوار للنقطة a من المجال $[a, b]$ (إن لم يكن هذا الشرط قائما في a يمكننا نقله الى اقرب نقطة من المجال $[a, b]$ يتمتع بهذا الخاصية بدون ان تتغير قيمة التكامل). وبالتالي فإن التابع $|x_0(t)|$ $m(\delta) = \sup_{a \leq t \leq a+\delta} |x_0(t)|$ غير منعدم من اجل $0 < \delta$ ويؤول الى 0 من اجل $\delta \rightarrow 0$. نستطيع من اجل كل $0 < \delta$ الاشارة الى نقطة $t_0 \in [a, a + \delta]$ بحيث $|x_0(t_0)| = m(\delta)$. فنحصل الآن من (2) على التقدير التالي:

$$|\lambda x_0(t_0)| = |\lambda| m(\delta) \leq \max_{a \leq s \leq a+\delta} |x_0(s)| \cdot \int_a^{t_0} |q(s, t)| ds \leq c \delta m(\delta)$$

حيث

$$c = \sup_{t, s} |q(s, t)|.$$

إذا قسمنا على $m(\delta)$ يأتي:

$$|\lambda| \leq c \delta$$

وهذا من اجل كل $0 < \delta$. يتناقض هذه المتراجحة الفرض $\lambda \neq 0$. انتهى برهان القضية.

بتطبيق 79.12 - ب و 66.12 نرى من اجل كل $y(t)$ أنه يوجد حل وحيد لمعادلة فولتيرا:

$$[E - \mu V] x(t) \equiv x(t) - \mu \int_a^t q(s, t) x(s) ds = y(t)$$

مثل بالسلسلة:

$$x(t) = (E - \mu V)^{-1} y(t) = y(t) + \mu V y(t) + \mu^2 V^2 y(t) + \dots + \mu^n V^n y(t) + \dots$$

يمكننا البرهان على ان المؤثر V^n (من اجل كل n) مؤثر لفولتيرا ايضا نواته $q_n(s, t)$ نستطيع حسابها بالتدرج حسب الدستور:

$$q_1(s, t) = q(s, t), \quad q_n(s, t) = \int_0^t q_{n-1}(s, \sigma) q_1(\sigma, t) d\sigma$$

(راجع مثلا (15)؛ نجد في نفس الكتاب امثلة تطبيقية للمعادلات التكاملية في الفيزياء الرياضية).

تمارين

1. نعتبر ثلاثة فضاءات توابع على المستقيم:
 - أ) الفضاء المؤلف من كل التوابع المستمرة والمحدودة
 - ب) الفضاء المؤلف من التوابع المستمرة التي تتمتع بالخاصية التالية:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$
 - ج) الفضاء المؤلف من التوابع المستمرة التي تنعدم كل واحد منها خارج مجال نزود هذه الفضاءات بالمسافة:

$$\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

هل هذه الفضاءات تامة؟

2. عتین في الفضاء $R^s(0, \infty)$ (المؤلف من التوابع المستمرة والمحدودة على نصف المستقيم $0 < x < \infty$ المزود بالنظيم $\|x(t)\| = \sup_t |x(t)|$) مجموعة لها قوة المستمر للتوابع $x_\alpha(t)$ التي تحقق $\|x_\alpha(t)\| = 1$ ، $\|x_\alpha(t) - x_\beta(t)\| \geq 1$ من اجل $\alpha \neq \beta$.

ملاحظة: ينتج من ذلك انه لا توجد في الفضاء $R^s(0, \infty)$ اية مجموعة قابلة للعد كثيفة اينما كان.

3. اثبت ان التابعية:

$$F(y) = \int_0^{1/2} y(x) dx - \int_{1/2}^1 y(x) dx$$

مستمرة في الفضاء $R^s(0, 1)$ ؛ اثبت ان الحد الاعلى لقيم $F(y)$ على كرة

الوحدة المغلقة في الفضاء $R^n(0, 1)$ يساوي 1 ، مع الملاحظة ان هذا الحد لا يدرك عند اي عنصر من كرة الوحدة.

4 . نعلم ان توطئة متوازي الاضلاع (12. 34. أ) قائمة من اجل كل شعاعين x و y من فضاء نظيمي X . اثبت ان التنظيم في X مولد عن الجداء السلمي:

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

5 . ليكن p جبر كل كثيرات الحدود $p(z)$ ذات المعاملات العقدية في القرص $Q = \{z: |z| \leq 1\}$ ، المزود بالتنظيم $\|p(z)\| = \max |p(z)|$. يحوي هذا الجبر 1 ويفصل كل نقطتين من المتراص Q لكن نظرية ستون 12. 25 - ج لا تقوم فيه ، والجبر p ليس كثيفا في الجبر $C^*(Q)$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة في القرص Q .

6 . ان المجموعة $I(F)$ من جبر نظيمي $R^n(Q)$ (فضاء متري) المؤلف من التوابع $R^n(Q) \ni f(x)$ التي تساوي التابع المنعدم على مجموعة مغلقة $Q \supset F$ مثالي مغلق في $R^n(Q)$. اثبت أنه اذا كان Q متراصا فإن كل مثالي مغلق $R^n(Q) \supset I$ مطابق للمثالي $I(F)$ من اجل مجموعة $Q \supset F$.

7 . نفرض ان جماعة متساوية الاستمرار $P^*(Q) \supset E$ مؤلفة من توابع P فضاء متري و Q متراص) تحقق: من اجل كل $Q \ni t$ ، تنتمي قيم التوابع $E \ni x(t)$ الى شبه متراص $P \supset P_t$. اثبت وجود شبه متراص $P \supset P_0$ يحوي قيم كل التوابع $E \ni x(t)$ عند كل النقاط $Q \ni t$.

8 . لتكن $T = \|t_{km}\|$ مصفوفة تحقق فرض نظرية توبيتر 12. 67 - ج . شيد بالعددين 1 و -1 متتالية ε_n ليست لها T - نهاية .

9 . اثبت ان الشرط $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 1$ ضروري وكاف لكي يكون المجال:

$$[\underline{\lim} x, \overline{\lim} x] \text{ محتويا في المجال } (67. 12) \quad [\underline{\lim} T_n(x), \overline{\lim} T_n(x)]$$

مهما كانت المتتالية المحدودة $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$

10 . ليكن $C = C^*(Q)$ جبر كل التوابع العقديّة $f(z)$ المستمرة على الدائرة $|z|=1$ (المزود بالنظيم المعتاد) وليكن Z جبر التوابع $\varphi(z)$ التحليلية في القرص $|z|<1$ والمستمرة في القرص $|z|\leq 1$ المزود بنفس النظيم . اثبت ان : $\|\varphi\| = \sup |\varphi(z)|$.

أ) التطبيق الذي يصل كل تابع $Z \ni \varphi(z)$ بالتابع النهائية $C \ni \varphi(e^{it})$ تماثل متباين من Z في C ؛ وبالتالي يمكن القول ان الجبر Z جبر جزئي من الجبر C .

ب) Z جبر جزئي مغلق في C .
ج) طيف المؤثر A ، وهو مؤثر الضرب في z في الفضاء C ، هو الدائرة $|z|=1$ ؛ اما طيف نفس المؤثر في الفضاء Z فهو القرص $|z|\leq 1$ ؛ زيادة على ذلك فإن القيم $|z|=1$ هي وحدها القيم الذاتية المعمة للمؤثر في A .

د) العنصر z قابل للقلب في الجبر C ، وغير قابل للقلب الجبر Z ، وليس قاسما معما للصفر في Z .

11 . لتكن Q مجموعة متراسة في المستوى الذي تنتمي اليه العناصر z وليكن : $C = C^*(Q)$ فضاء كل التوابع العقديّة المستمرة على المجموعة Q . اثبت ان مؤثر الضرب في z طيفه هو المجموعة Q .

12 . نحن نعلم ، من اجل مؤثر A في فضاء باناخ X وكثير حدود $p(\lambda)$ ، ان المؤثر $p(A)$ متراس . برهن على ان كل نقاط طيف المؤثر A (باستثناء ممكن لجذور كثير الحدود $p(\lambda)$) قيم ذاتية .

13 . اثبت ان متناوبة فريدولم قائمة من اجل مؤثر A له قوة (كيفية) متراسة

14 . ليكن $p \geq 1$ ، $q \geq 1$ ، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اثبت من اجل تابعين $x(t)$ و $y(t)$ مستمرين بتقطع على مجال $a \leq t \leq b$ ،
مراجعة هولدر (Hölder) :

$$\left| \int_a^b x(t) y(t) dt \right| \leq \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt} \sqrt[q]{\int_a^b |y(t)|^q dt}.$$

15. اثبت، باعتبار تابعي التمرين 14، المتراجحة:

$$\sqrt[p]{\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt} \leq \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |y(t)|^p dt}$$

وهذا من اجل $p \geq 1$.

16. ليكن $p \geq 1$ و $q \geq 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اثبت، من اجل شعاعين

كيفيين $x = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ و $y = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ، متراجحة هولدر:

$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right| \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q}$$

17. اثبت، باعتبار نفس الشعاعين $x = \{\xi_k\}$ و $y = \{\eta_k\}$ ، متراجحة

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\xi_k + \eta_k|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |\eta_k|^p} \quad \text{المثلث:}$$

وهذا من اجل $p \geq 1$.

18. برهن على ان الفضاء النظيمي l_p (33.12 - د) تام مهما كان

$p \geq 1$.

19. لدينا متتالية توابع $(n = 1, 2, \dots) x_n(t)$ معرفة وقابلة

للإشتقاق لانهايا على مجال $a \leq t \leq b$. نفرض وجود متتالية ثوابت

A_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) تحقق:

$$|x_n^{(k)}(t)| \leq A_k \quad (n=1, 2, \dots; \quad k=0, 1, 2, \dots).$$

استخرج متتالية جزئية $(m = 1, 2, \dots) x_{nm}(t)$ متقاربة بانتظام على

المجال $a \leq t \leq b$ لما $m \rightarrow \infty$ وكذا كل متتالية مشتقات $x_{nm}^{(k)}(t)$ مهما

كانت رتبة الاشتقاق k .

20. اثبت ان الكمية $\|x\|_p$ (33.12 - ج) لا تحقق مسلمة المثلث

13.12 - ج إن كان $p < 1$.

21. هناك صيغة اخرى لنظرية ارزيلا 42.12 لا تتطلب استمرار التتابع $x(t)$ ولا تراص (ولا حتى القابلية لمسافة) مجموعة تعريفها Q . وهذه الصيغة هي: لتكن $P(Q)$ جماعة توابع محدودة $x(t)$ معرفة على مجموعة كيفية Q ، قيمها في فضاء متري P ، ندخل مسافة على هذه الجماعة بواسطة الدستور: $\rho(x, y) = \sup \rho(x(t), y(t))$. تكون مجموعة $P(Q) \supset E$ شبه متراسة إذا فقط إذا تمكنا، من اجل كل $0 < \epsilon$ ، من ايجاد تجزئة للمجموعة Q الى عدد منته من المجموعات الجزئية Q_1, \dots, Q_n بحيث لا يتجاوز تغير كل تابع من E على اية مجموعة من المجموعات Q_1, \dots, Q_n العدد ϵ .

نبذة تاريخية

برزت البنيات الاساسية للتحليل في اواخر القرن 19 وبداية القرن 20 ، وحدث ذلك عندما تجمّع في التحليل عدد هائل من النتائج والمعلومات حتى اصبح تنظيمها امرا لازما وعاجلا سبق ظهور الارتباط الخطي للأشعة والبعده (الساوي لأي عدد n طبيعي) عند غراسمان Grassmann (1846) لكن الفضاءات الشعاعية المجردة ظهرت لأول مرة عند بيانو Peano (1888) تطورت نظرية فضاءات التوابيع المستمرة في ايطاليا خلال السبعينات من القرن 19 (فولتيرا، اسكولى، ارزيلا، ديني). برهن على النظرية المتعلقة بشروط تراص مجموعة توابيع مستمرة، التي تسمى عادة نظرية ارزيلا، اسكولى لأول مرة سنة 1883. اما نظرية فيرشراس حول تقريب (أو مقارنة) التوابيع المستمرة بواسطة كثيرات الحدود فتعود لسنوات 1870؛ قام بتعميمها (25. 12 - 35. 12) ستون عام 1936.

اهتمت المرحلة الموالية بادخال الفضاءات الهيلبرتية استفتحت هذه المرحلة بانشاء نظرية خاصة بالمعادلات الخطية التكاملية من طرف فولتيرا (1887) وفريدولم (1900) اكتشف هيلبرت سنة 1906 تشابها متميزا بين المسألة الخاصة بالقيم الذاتية للمؤثرات التكاملية ومسألة تبسيط شكل تربيعي، هذا وتبين ان حل المسألة المتعلقة بالمؤثرات التكاملية مرتبط بتراص هذه المؤثرات. قدم ا. شميث E. Schmidt عام 1907 عرضا جديدا لنظرية هيلبرت وذلك بكتابة المؤثرات التكاملية بواسطة مصفوفات غير منتهية تعمل في «الفضاء الهيلبرتي» للمتتاليات ذات المربع القابل للجمع. انشأ ستون وفون نومان Von Neumann حوالي 1930 نظرية مسلمية للفضاءات الهيلبرتية تعتمد على مفهوم الجداء السلمي.

قام ف. ريسي F. Riesz سنة 1918 بانشاء آخر لنظرية المؤثرات المتراسة التي تصلح في الواقع، من اجل كل فضاء نظيمي تام (شكليا،

بالنسبة لفضاء التوابع المستمرة). ظهر التعريف المجرد للفضاءات الشعاعية التنظيمية بعد ذلك بقليل، 1920 الى 1922، في اعمال باناخ، هان Hahn، فينر Wiener. اكتشفت مدرسة باناخ خلال العشرينات المبادئ الاساسية للتحليل التابعي الخطي بما في ذلك النظرية حول التطبيق المفتوح ونظرية الحد المنتظم (47.12). نجد النتائج التي توصلت لها هذه المدرسة وكذا عددا كبيرا من التطبيقات في [20]. رغم ذلك كله فإن المسألة الرئيسية للتمثيل القانوني لمؤثر خطي كفي، المائل للتمثيل الجورداني لمؤثر خطي ذي بعد منته، لازالت تنتظر حلها. بهذا الصدد هناك عدد كبير من النتائج الهامة والقوية تتعلق بالمؤثرات في فضاء هيلبرتي. حصل هيلبرت منذ 1906 - 1911 على نتيجة مماثلة للتمثيل القطري للمؤثرات التناظرية (والهيرميتية) متراصة او غير متراصة اما الانتقال الى المؤثرات غير التناظرية فقد تم ببطء شديد؛ ترجع النتائج الاولى التي تعد ذات قيمة (والمرتبطة اساسا بالاسمين ليفشيتز Livchitz وكلديش keldych) الى اواخر الاربعينات. للإطلاع على الحالة الراهنة لهذه النظرية انظر الدراستين [4] و [5].

اما نظرية الجبور التنظيمية التي لم نقدم سوى مبادئها الاولى فقد انشئت من طرف غلفاند خلال 1937 - 1939؛ قدم [3] و [8] عرضا لما تتخلله امثلة متنوعة خاصة بتطبيقاتها في التحليل.

إن أول من قام بمحاولة علمية لجمع متتاليات متباعدة هو أولر («اسس الحساب التفاضلي» سنة 1755). إن الامر لا يتعلق بطبيعة الحال، في ذلك العهد، بنظرية متينة وسليمة؛ بالإضافة الى ذلك فإن الاستعمال غير السلم للسلاسل المتباعدة قد هدم اعتبارها. كان من شأن اصلاح كوشي (1821) انه ابعد، لمدة طويلة، المتتاليات والسلاسل المتباعدة من التحليل. تكونت النظرية الحديثة لجمع المتتاليات في اواخر القرن 19 وبداية القرن 20 (سيزادو 1880، فورونوي 19.2، توبليتس 1911). يمكن للمقاريء التعرف على حالتها الراهنة من خلال (21).

المعادلات التفاضلية

إذا قدر لعقل في لحظة ما ان
 يتعرف على كل القوى المتواجدة في
 الطبيعة وعلى مواقع الكائنات فيها، وان
 كان اتساع هذا العقل قادرا على تحليل
 هذه المعطيات، فإنه سيتمكن من وضع،
 في قانون واحد، حركات اكبر الاجسام
 في الكون وحركات اخف الذرات
 وزنا؛ سوف لن يكون لهذا العقل ادنى
 شك فالمستقبل كالماضي، سيكونان
 مرتسمين امامه. يمثل الفكر البشري في
 كمال ما قدمه في علم الفلك، صورة
 مبسطة لذلك العقل.

بيير - سيمون لابلاس « بحث فلسفي
 حول الاحتمالات (1795) »

Pierre-Simon Laplace

§ 1. 13 . تعاريف وامثلة .

11. 13 . أ . إذا ضمت معادلة بالنسبة لتابع مجهول $u = u(t)$ ،
 $a \leq t \leq b$ مشتقا (من الرتبة الاولى او رتبة عالية) لهذا التابع، فإنها
 تسمى معادلة تفاضلية . يمكن ان نبعث عن التابع $u(t)$ حسب شروط
 المسألة المعتبرة، اما من بين التوابع العددية واما من بين التوابع الشعاعية التي
 تنتمي قيمها الى فضاء بعده n ، واما من بين التوابع الشعاعية التي تنتمي
 قيمها الى فضاء شعاعي نظيمي .

يسمى كل تابع $u(t)$ يحقق معادلة تفاضلية معطاة حلاً أو حلاً خاصاً لهذه المعادلة. تسمى مجموعة كل الحلول الحل العام لهذه المعادلة.

ب. وهكذا فإن أبسط المعادلات تفاضلية وهي:

$$(1) \quad u'(t) = 0 \quad (a \leq t \leq b)$$

حلها العام هو $u(t) = \text{ثابت}$ ؛ والثابت هذا ثابت عددي إن كان قيم $u(t)$ عددية (54.7 - ج)، وثابت شعاعي إن كانت قيمة شعاعية، وعنصر ثابت من فضاء نظمي B إن اخذ $u(t)$ قيمة في الفضاء B (16.12 - ق). يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(2) \quad u'(t) = g(t)$$

حيث $g(t)$ تابع معطى (عددي أو شعاعي) على شكل تكاملي:

$$u(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau + \text{const}$$

(حيث C ثابت) شريطة أن يكون $g(t)$ مستمرا بتقطع (23.9 و 36.12 - ج) يبين المثالان (1) و (2) أن المعادلات التفاضلية لا تعين حلولها بطريقة وحيدة بحيث أنه يجب لتعيين حل تعييننا كاملاً، فرض شروط إضافية. جرت العادة أن فرض كشرط إضافي بأن قيمة التابع المجهول $u(t)$ معلومة عند نقطة $t = t_0 \in [a, b]$. عند معرفة $u(t_0)$ فإن حل المعادلة (1) أو (2) يتعين بطريقة وحيدة.

ج. تكتب معادلة اعم من المعادلتين السابقتين على الشكل:

$$(3) \quad u'(t) = \Phi(t, u(t))$$

حيث $\Phi(t, z)$ تابع قيمة في الفضاء النظمي B الذي تنتمي إليه قيم التابع $u(t)$. نتساءل هنا عن وجود حل $u(t)$ وعن وحدانيته عندما يكون $u(t_0)$ معطى.

د. من المفيد أن نعطي لـ (3) معنى «حركي» في الفضاء B. نفرض أن هناك نقطة متحركة في الفضاء B موقعها في كل لحظة هو: $u = u(t)$.

عندما يتغير t فإن النقطة المتحركة ترسم في B منحنيا $u = u(t)$. يمثل التابع الشعاعي $u(t)$ قانون حركة النقطة المتحركة على طول هذا المنحنى. عندئذ يمكن فهم الشعاع $u'(t)$ على انه شعاع سرعة النقطة المعتبرة (وهو نهاية نسبة المسافة المقطوعة Δu على الزمن Δt الذي قطعت خلاله هذه المسافة) يصل الطرف الايمن من المعادلة (3) بشعاع $B \ni z$ من اجل كل $t \in [a, b]$ مثبت بالشعاع $\Phi(t, z)$. يفهم الحل $u(t)$ على انه قانون حركة نقطة متحركة في الفضاء B عندما تكون سرعة الحركة في كل لحظة t ومن اجل كل موقع $B \ni u$ ، مطابقة للشعاع $\Phi(t, u)$. وهكذا فإن التابع $\Phi(t, u)$ يعرف في كل لحظة t حقل اشعة يعين كل واحد منها سرعة حركة النقطة المتحركة عند النقطة u من الفضاء B الموافقة لـ t . تمثل حلول المعادلة (3) المسارات الممكنة للنقطة المتحركة، وتسمى في هذه الحالة المنحنيات التكاملية للمعادلة.

يمكننا في الفضاء $R_1 \times B$ تقديم معنى سي محض للمعادلة (3) . يوافق كل تابع $u = u(t)$ منحنيا في الفضاء $R_1 \times B$ ($u \in B, t \in R_1$) . إن التفاضلية $u'(t) dt$ هو الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $u(t)$ عندما يتغير المتغير المستقل من t الى $t + dt$. وبالتالي فإن المشتق $u'(t)$ في الحالة الحقيقية ($B = R_1$) يفهم على انه المعامل الزاوي للمماس اي ميل المنحنى $u(t)$ عندما ننتقل من t الى $t + dt$ ، الى لامتناهيات في الصغر من رتب اعلى . في الحالة العامة ومن اجل B كيفي ، فإن للمشتق معنى مماثلا : إن المستقيم $u - u_0 = u'(t_0)(t - t_0)$ مماس للمنحنى $u = u(t)$ من اجل $t = t_0$ ويمكن تسمية المقدار $u'(t_0)$ معاملا زاويا . يعين التابع $\Phi(t, z)$ عند كل نقطة (t_0, z_0) من الفضاء $R_1 \times B$ مستقيما :

$$(4) \quad u - z_0 = \Phi(t_0, z_0)(t - t_0)$$

وتتطلب المعادلة (3)، من اجل كل $t \in [a, b]$ ، ان يكون للمنحنى $u = u(t)$ مماس مطابق للمستقيم (4) عند النقطة $[t_0, u(t_0)]$.

د . نعتبر كمثال في الفضاء $B = R_2$ المعادلة:

$$u'(t) = v(u)$$

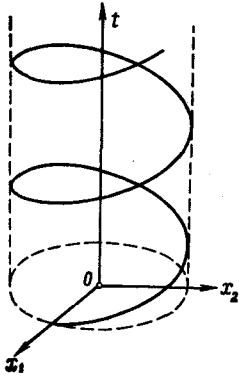
حيث يرمز $v(u)$ ، من اجل كل $u \in R_2$ ، للشعاع الذي نحصل عليه بادارة الشعاع u مقدار زاوية قائمة في الاتجاه الموجب .

من وجهة النظر الحركية، ينبغي على النقطة المتحركة ان تتحرك في المستوى R_2 بحيث يطابق شعاع سرعتها الشعاع $v(u)$ عند كل نقطة u . من الواضح ان كل حل يمثل حركة على طول دائرة متمركزة في مصدر الاحداثيات بسرعة تساوي عدديا نصف قطر هذه الدائرة (الرسم 1. 13) .

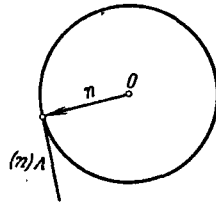
من وجهة النظر الهندسية نبحث عن المنحنيات في الفضاء الثلاثي البعد: $R_1 \times R_2$ التي يعطي مماسا عند كل نقطة بالمعادلة:

$$u - z_0 = v(z_0) (t - t_0)$$

إن شكل المنحنيات المطلوبة شكل حلزوني حول المحور الذي تنتمي اليه (الرسم 2. 13) .



الرسم 2. 13



الرسم 1. 13

س. سنرى ادناه ان جملة معادلات من الشكل :

$$(5) \quad \begin{cases} u_1'(t) = \Phi_1(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \\ \dots \\ u_n'(t) = \Phi_n(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \end{cases}$$

والمعادلة من الرتبة n ذات الشكل :

$$(6) \quad u^{(n)} = \Phi(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

ترد أي الى معادلة من النمط (3).

ص. ستكون مسائل وجود حلول المعادلات التفاضلية ووحدايتها ضمن شروط اضافية، محل انشغالنا طيلة الفصل؛ نكتفي الآن باعتبار بعض الحالات البسيطة جداً والتي نحصل فيها على الحل بشكل صريح.

21. 13. لتكن معادلة من الشكل :

$$(1) \quad u'(t) = A(t) u(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

تسمى مثل هذه المعادلة معادلة خطية متجانسة. نفرض في البداية ان التابع المطلوب $u(t)$ تابع عددي وان المعامل $A(t)$ تابع عددي مستمر معطى. نفرض ايضا القيمة $u_0 = u(t_0)$ معلومة ايضا. إن التابع $u(t) \equiv 0$ حل بديهي للمعادلة (1) لكنه لا يحقق الشرط الابتدائي، إن كان $u_0 \neq 0$. لنبحث عن حلول اخرى. ان كان $u(t)$ حلا غير مطابق للصفر فإنه يوجد مجال تتحقق فيه: $u(t) \neq 0$ ، مثلا :

$u(t) > 0$. نحصل عندما نقسم (1) على $u(t)$ ، على :

$$\frac{u'(t)}{u(t)} \equiv [\ln u(t)]' = A(t)$$

ومنه :

$$\ln u(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + C$$

بوضع $t = t_0$ نحصل على $C = \ln u_0$ ؛ في الختام يأتي بعد التخلص من اللوغاريتمات :

$$(2) \quad u(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} u_0$$

يمكن التأكد مباشرة ان (2) يمثل بالفعل حلا للمعادلة (1) لا يتعلق الآن بإشارة $u(t)$. نلاحظ ان الحل (2) معرف من اجل كل $t \in [a, b]$ (ولا ينعدم في اية نقطة إن كان $u_0 \neq 0$). إذن فإن المعادلة (1) تقبل الحل (2) الذي يحقق الشرط الابتدائي $u(t_0) = u_0$. اذا كان $A \equiv A(t)$ ثابتا فإن الحل (2) يأخذ شكلا بسيطا جداً هو:

$$(3) \quad u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0$$

31. 13. نعود الى المعادلة:

$$(1) \quad u'(t) = A(t) u(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

ونفرض هذه المرة ان $u(t)$ تابع شعاعي قيمة في فضاء باناخي B ؛ كما نفرض ان المعامل $A(t)$ مؤثر خطي مستمر يطبق، من اجل كل $t \in [a, b]$ ، الفضاء B في نفسه وأنه يتعلق باستمرار بالوسيط t . إن استدلال 21. 13 غير صالح هنا لأن القسمة على $u(t)$ تفقد معناها. ورغم ذلك يتبين اننا نستطيع اعطاء معنى سليم الى النتيجةين 21. 13 و (3).

نفرض في البداية ان المؤثر $A(t) \equiv A$ لا يتعلق بـ t ، سندرس الحالة العامة في 91. 13.

نعتبر $e^{(t-t_0)A}$ كتابع للمؤثر A بمفهوم 68. 12 - ج:

$$(2) \quad e^{(t-t_0)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n A^n}{n!}$$

إن هذا التابع معرف من اجل كل t حقيقي ويأخذ قيمة في الفضاء $L(B)$ المؤلف من المؤثرات الخطية المحدودة في B . يمكن اشتقاق السلسلة (2) حداً حداً بالنسبة لـ t (66. 12)، يعطينا ذلك:

$$\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(t-t_0)^{n-1} A^n}{n!} = A e^{(t-t_0)A}$$

نستخلص عندئذ ان: $u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0)$ حل بالفعل للمعادلة (1). من اجل: $t = t_0$ يعطي هذا الحل الشعاع $u = u(t_0)$. وهكذا،

من اجل $u(t_0)$ معلوم، لدينا حل للمعادلة المتجانسة (1) يكتب على الشكل:

$$(3) \quad u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0)$$

للبهان على وحدانية الحل المحصل عليه، نثبت التوطئة التالية:

توطئة. إذا كان $B(t)$ تابعا مؤثريا قابلا للإشتقاق بقوة (اي اذا تحققت العلاقة: $B'(t)x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} x$) من اجل كل

$x \in X$ وكان $x(t)$ تابعا شعاعيا قابلا للإشتقاق فإن التابع الشعاعي:

$$y(t) = B(t)x(t) \quad \text{يقبل ايضا الاشتقاق ولدينا:}$$

$$y'(t) = B(t)x'(t) + B'(t)x(t)$$

$$\frac{B(t+\Delta t)x(t+\Delta t) - B(t)x(t)}{\Delta t} = \text{البرهان. لدينا:}$$

$$= B(t+\Delta t) \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} x(t)$$

إن الحد الاول في الطرف الايمن يؤول الى $B(t)x'(t)$ عندما

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad (47.12 \text{ ر. س}) \text{ اما الحد الثاني فيؤول الى } B'(t)x(t)$$

ومنه تأتي التوطئة.

نبرهن الآن ان (3) حل وحيد للمعادلة (1) عندما تكون القيمة

$u(t_0)$ معلومة. ليكن $u(t)$ حلا كيفيا للمعادلة (1) حيث (1)

القيمة $u(t_0)$ معلومة. ندخل تابعا جديدا مجهولا $v(t)$ بواسطة

العلاقة $u(t) = e^{(t-t_0)A}v(t)$ ، أو وهو الامر نفسه،

بنقل $u(t)$ في المعادلة (1) $v(t) = e^{-(t-t_0)A}u(t)$

وباستخدام التوطئة نحصل على:

$$u'(t) = Ae^{(t-t_0)A}v(t) + e^{(t-t_0)A}v'(t) = Ae^{(t-t_0)A}v(t)$$

ومنه:

$$e^{(t-t_0)A}v'(t) = 0$$

بالضرب في $e^{-(t-t_0)A}$ نحصل على $v'(t) = 0$. ينتج من ذلك:

$$v(t) \equiv v(t_0) = u(t_0)$$

وبالتالي فإن الحل $u(t)$ يكتب على الشكل (3)، وهو المطلوب.

41. 13. كيف سيكون الحل 31. 13 في حالة فضاء حقيقي بعده n ؟

للإختصار، نضع $t_0 = 0$. نختار في الفضاء R_n أساساً e_1, \dots, e_n .
نشر التابع الشعاعي $u(t)$ وفق هذا الأساس؛ ليكن:

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) e_k$$

فإن:

$$u'(t) = \sum_{k=1}^n u'_k(t) e_k$$

والمعادلة الشعاعية 21. 13 (1) تكتب على شكل جملة معادلات سلمية:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du_1(t)}{dt} = a_{11}u_1(t) + \dots + a_{1n}u_n(t) \\ \dots \\ \frac{du_n(t)}{dt} = a_{n1}u_1(t) + \dots + a_{nn}u_n(t) \end{cases}$$

بواسطة مصفوفة حقيقية ثابتة $A = \|a_{jk}\|$. الحل هو نتيجة تطبيق

المؤثر e^{tA} على الشعاع الابتدائي $u_0 = u(0)$.

يتبين ان الحل المطلوب يمكن كتابته على شكل صريح وبسيط في حالة

اختيارنا للاشعة الابتدائية u_0 اشعة اساس جورדاني للمصفوفة A (71. 12)

- س). ندخل فيما يتعلق بمثل هذه الاشعة الرموز التالية:

أ) نرمز لشعاع الاساس الموصول بخانة جوردانيه مؤلفة من عنصر واحد

λ_j ، ب f_j .

ب. نرمز لاشعة الاساس الموصولة بخانة جوردانية $m \times m$:

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{array} \right\|$$

(λ_j حقيقي) ب f_j^1, \dots, f_j^m . ونرمز لشعاعي الاساس

الموصولين بخانة (2×2) :

$$(3) \quad \left\| \begin{array}{cc} \sigma_j & -\tau_j \\ \tau_j & \sigma_j \end{array} \right\|, \quad \lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$$

ب. g_j, h_j ، اخيرا نرمز لأشعة الاساس الموصولة بخانة

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_j - \tau_j & 1 & 0 & \dots \\ \tau_j & \sigma_j & 0 & 1 \dots \\ & & \sigma_j & -\tau_j \dots \\ & & \tau_j & \sigma_j \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|$$

ب $h_j^1, g_j^1, \dots, h_j^m, g_j^m$. نذكر ان الاعداد λ_j تمثل في كل الحالات المعتبرة جذور المعادلة المميزة.

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{array} \right\| = 0$$

حيث σ_j و τ_j اعداد تمثل على التوالي الاجزاء الحقيقية والاجزاء الخيالية للجذور العقدية لهذه المعادلة (12 . 71 - س).

إن كل خانة من المصفوفة الجوردانية تعرف فضاء جزئيا لا متغير للمؤثر (بعده $1, m, 2, 2m$ على التوالي). إذا طبقنا المؤثر e^{tA} على شعاع من هذا الفضاء الجزئي يعطينا شعاعا آخر من نفس الفضاء الجزئي. نرمز للحلول التي توافق الاشعة الابتدائية $f_j, f_j^s, h_j, g_j, h_j^s, g_j^s$ ($s = 1, \dots, m$) على التوالي ب

$$f_j(t), f_j^s(t), h_j(t), g_j(t), h_j^s(t), g_j^s(t)$$

يرد المؤثر A في الفضاء اللامتغير الوحيد البعد المولد من الشعاع f_j ، الى الضرب في λ_j ويرد المؤثر e^{tA} الى الضرب في $e^{\lambda_j t}$. نستنتج من ذلك:

$$(5) \quad f_j(t) = e^{\lambda_j t} f_j$$

فما يخص بالفضاء اللامتغير ذي m بعدا الموافق للخانة الجوردانية (2)

$$\text{لدينا (12 . 91 - ر):} \quad e^{tA} = \left\| \begin{array}{cccc} e^{\lambda_j t} & t e^{\lambda_j t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_j t} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_j t} \\ 0 & e^{\lambda_j t} & t e^{\lambda_j t} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_j t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_j t} \end{array} \right\|$$

الانطلاق e_1, \dots, e_n الذي تأخذ المعادلة 21.13 (1) بالنسبة اليه شكل الجملة 41.13 (1)، بواسطة n تابعا سلمياً (احداثيات). ليكن مثلاً:

$$f_j(t) = \sum_{k=1}^n u_{jk}(t) e_k, \quad h_j(t) = \sum_{k=1}^n v_{jk}(t) e_k, \quad g_j(t) = \sum_{k=1}^n w_{jk}(t) e_k$$

$$f_j^s(t) = \sum_{k=1}^n u_{jk}^s(t) e_k, \quad h_j^s(t) = \sum_{k=1}^n v_{jk}^s(t) e_k, \quad g_j^s(t) = \sum_{k=1}^n w_{jk}^s(t) e_k$$

$$f_j = \sum u_{jk} e_k, \quad h_j = \sum v_{jk} e_k, \quad g_j = \sum w_{jk} e_k \quad : \text{م}$$

$$f_j^s = \sum u_{jk}^s e_k, \quad h_j^s = \sum v_{jk}^s e_k, \quad g_j^s = \sum w_{jk}^s e_k$$

لدينا:

$$f_j(t) = e^{\lambda_j t} f_j = e^{\lambda_j t} \sum u_{jk} e_k = \sum u_{jk}(t) e_k$$

ومنه:

$$(1) \quad u_{jk}(t) = e^{\lambda_j t} u_{jk}$$

نحصل بطريقة مماثلة على:

$$(2) \quad u_{jk}^s(t) = e^{\lambda_j t} \left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!} u_{jk}^1 + \dots + u_{jk}^s \right],$$

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} v_{jk}(t) &= e^{\sigma_j t} [\cos \tau_j t \cdot v_{jk} + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}], \\ w_{jk}(t) &= e^{\sigma_j t} [-\sin \tau_j t \cdot v_{jk} + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}], \end{aligned} \right\}$$

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} v_{jk}^s(t) &= e^{\sigma_j t} \left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!} (\cos \tau_j t \cdot v_{jk}^1 + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}^1) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (\cos \tau_j t \cdot v_{jk}^s + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}^s) \right], \\ w_{jk}^s(t) &= e^{\sigma_j t} \left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!} (-\sin \tau_j t \cdot v_{jk}^1 + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}^1) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-\sin \tau_j t \cdot v_{jk}^s + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}^s) \right]. \end{aligned} \right\}$$

61.13 . يمكن استخدام الدساتير 41.31 (5)-(8) في دراسة المنحنيات التكاملية $u = u(t)$ وسلوكها المقاربي لما $t \rightarrow \infty$. يستحسن استعمال التفسير الحركي 11.13 - د.

أ. بخصوص شعاع ابتدائي من النمط f_j (41.13 - أ) فإن الحل $f_j(t)$ يساوي اما الشعاع الثابت f_j لما $\lambda_j = 0$ واما شعاعا يتعد عن

الصفء وفق القانون الاسي (لما $t \rightarrow \infty$) على طول المحور f_j لما $\lambda_j > 0$ ، واما شعاعا يقترب من الصفر وفق نفس القانون على طول نفس المحور لما $\lambda_j < 0$

ب. نفرض ان الشعاع الابتدائي من النوع f_j^k اي انه احد اشعة الاساس لفضاء جزئي لا متغير بعده m موصول بخانة جوركانية 41.13 (2). إذا استعملنا الدستور الموافق له في 41.13 (6) نحصل على الحل :

$$f_j^k(t) = e^{t\lambda_j} \left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} f_j^1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} f_j^2 + \dots + \frac{t}{1!} f_j^{k-1} + f_j^k \right]$$

نرى ان نصف القطر الشعاعي للمنحنى التكاملي الموافق له ، وهو الشعاع الذي يطابق في اللحظة الابتدائية الشعاع f_j^k يكسب مع الزمن الاحداثيات فإن المركبة وفق الاشعة f_j^1, \dots, f_j^{k-1} بحيث لما يصبح t كبيرا بكفاية فإن المركبة وفق الشعاع f_j^1 تصبح هي المسيطرة. إذا كان $\lambda_j \geq 0$ ، $k > 1$ فإن المنحنى يبتعد ، من اجل $t \rightarrow \infty$ ، من مصدر الاحداثيات ويصبح مماسه (نرى ذلك بالإشتقاق) في النهاية موازيا للشعاع f_j^1 . من اجل $\lambda_j = 0$ فإن سرعة النقطة المتحركة التي تبتعد عن مصدر الاحداثيات تتغير وفق قانون المنحنى يقترب ، لما $t \rightarrow \infty$ ، من مصدر الاحداثيات ؛ لما كانت المركبة وفق بالقدر الذي نريد ، راسه في مصدر الاحداثيات ومحوره موجه على طول f_j^1 ؛ يعني ذلك ان الموقع النهائي للماسة يطابق المماس للشعاع f_j^1 .

ج. نفرض ان الشعاع الابتدائي $u(t_0)$ شعاع h_j أو g_j في فضاء جزئي لا متغير ، بعده 2 : H_2 ، يوافق خانة جوركانية (2×2) كنا اعتبرناها في (41.13 - ج). تبين حينئذ الدساتير 41.13 (7) ان الحل $u(t)$ يرسم في المستوى H_2 :

قطعا ناقصيا متمركز في مصدر الاحداثيات ان كان $\sigma_j = 0$.

لولبا يبتعد عن المصدر إن كان $\sigma_j > 0$.

لولبا يقترب من مصدر الاحداثيات ويؤول الى المصدر لما $t \rightarrow \infty$ إن

كان $\sigma_j < 0$.

د . نفرض ان الشعاع الابتدائي $u(t_0)$ شعاعاً من الاشعة h^k أو g^k في فضاء جزئي لا متغير بعده $2m$: H_{2m} يوافق خانة جورداية بعدها $2m \times 2m$ (المشار اليها في 41.13 - د) . عندئذ يرسم الحل $u(t)$ في الفضاء H_{2m} واحداً من المنحنيين التاليين :

لولبا يبتعد عن المصدر مماسه يؤول الى موازاة، لما $t \rightarrow \infty$ ، مستوى اولي ثنائية من اشعة الاساس، ذلك ان كان $\sigma_j \geq 0$.

لولبا يقترب من مصدر الاحداثيات ويؤول اليه لما $t \rightarrow \infty$ ، ويصبح مماساً لمستوى اولي ثنائية من اشعة الاساس، ذلك ان كان $\sigma_j < 0$.

ر . في الحالة العامة التي يكون فيها للشعاع $u(t_0)$ عدة مركبات وفق اشعة اساس جورداي، فإن الحركة الموافقة له هي المجموع الهندسي للحركات المعبرة .

13. 71 . يمكن كتابة معادلة سلمية خطية من الرتبة :

$$(1) \quad y^{(n)}(t) = a_1(t)y(t) + \dots + a_n(t)y^{(n-1)}(t)$$

على شكل جملة من الرتبة الاولى بوضع

$$(2) \quad y(t) = u_1(t), \quad y'(t) = u_2(t), \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t) = u_n(t)$$

بهذا التعويض لدينا :

$$(3) \quad \begin{cases} u_1'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) = u_3(t), \\ \dots \\ u_n'(t) = a_1(t)u_1(t) + a_2(t)u_2(t) + \dots + a_n(t)u_n(t) \end{cases}$$

وبالعكس، فإن كل حل $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ للجملة (3)

يسمح بتعيين تابع $y(t) = u_1(t)$ ومشتقاته حسب الدساتير (2) ؛ تبين المعادلة الاخيرة (3) ان التابع $y(t)$ يحقق المعادلة (1) .

بوضع $a_1(t) = a_1, \dots, a_n(t) = a_n$ (حيث a_1, \dots, a_n

ثوابت) نطبق النتائج 41.13. إن لمصفوفة المؤثر A شكلات خاصا

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

ليكن $f = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$ شعاعا ذاتيا للمؤثر A يوافق قيمة ذاتية λ . لدينا

$$Af = \lambda f, \quad \xi_1, \dots, \xi_n \text{ ضمن الاحداثيات}$$

$$\xi_2 = \lambda \xi_1$$

$$\xi_3 = \lambda \xi_2$$

$$\dots$$

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + \dots + a_n \xi_n = \lambda \xi_n$$

بوضع $\xi_1 = 1$ نجد على التوالي:

$$(4) \quad \xi_1 = 1, \xi_2 = \lambda, \xi_3 = \lambda^2, \dots, \xi_n = \lambda^{n-1}$$

$$a_1 + a_2 \lambda + \dots + a_n \lambda^{n-1} = \lambda^n.$$

انها المعادلة المميزة للمعادلة (1)؛ ننتقل من الثانية الى الاولى بتعويض

$$y^{(k)} \text{ بـ } \lambda^k \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

وهكذا فإن الجذور المميزة للمصفوفة A جذور للمعادلة المميزة (4).

ثم إن كل شعاع موصول بقيمة ذاتية λ على استقامة واحدة مع الشعاع $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$ وبالتالي فهو معرف بطريقة وحيدة

(بتقدير الاستقامة الواحدة). إذن نرى في الحالة التي يكون فيها λ جذرا

تضاعفه m ، بروز خانة جورדانية حقيقية او عقدية ذات m سطراً و m

عموداً (بعبارة اخرى، فإن اساس (جمع اس) قوى القوائم الاولى تساوي

في هذه الحالة مضاعفات الجذور، وكثير الحدود الاصغرى للمصفوفة A

يطابق كثير حدودها المميز [14؛ الفصل 6].

طبقاً لـ 41.13.13 يمكن كتابة n حلا خاصة ومختلفة للجمله (3)،

توافق n شعاعا من الاساس الجورداني باعتبارها اشعة ابتدائية. نقتصر هنا

على الكتابة بصراحة اولى مركبات هذه الحلول وهذا نظرا لكون المطلوب

منا هو بالذات المركبة الاولى $u_1(t) = y(t)$ حسب الدساتير (2) :

$$(5) \quad u_{j1}(t) = u_{j1} e^{\lambda_j t}$$

وهذا من اجل كل جذر حقيقي بسيط λ_j ؛

$$(6) \quad u_j^s(t) = e^{\lambda_j t} \left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!} u_j^1 + \dots + u_j^s \right], \quad s=1, \dots, m$$

وهذا من اجل كل جذر حقيقي λ_j تضاعفه m ؛

$$(7) \quad \begin{cases} v_j(t) = e^{\sigma_j t} [v_{j1} \cos \tau_j t + w_{j1} \sin \tau_j t], \\ w_j(t) = e^{\sigma_j t} [-v_{j1} \sin \tau_j t + w_{j1} \cos \tau_j t], \end{cases}$$

وهذا من اجل كل جذر بسيط عقدي $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ ؛

$$(8) \quad \begin{cases} v_j^s(t) = e^{\sigma_j t} \left[\frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!} (v_j^1 \cos \tau_j t + w_j^1 \sin \tau_j t) + \dots \right. \\ \left. \dots + (v_j^s \cos \tau_j t + w_j^s \sin \tau_j t) \right], \quad s_j=1, \dots, m_j, \\ w_j^s(t) = e^{\sigma_j t} \left[\frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!} (-v_j^1 \sin \tau_j t + w_j^1 \cos \tau_j t) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-v_j^s \sin \tau_j t + w_j^s \cos \tau_j t) \right], \quad s_j=1, \dots, m_j, \end{cases}$$

وهذا من اجل كل جذر عقدي $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ تضاعفه m_j .

81. 13 . عندما نعوض الحلول المحصل عليها ببعض عباراتها الخطية فإننا
نتمكن من الاشارة الى الحلول التالية البالغ عددها n :

(أ) لدينا الحل $e^{\lambda_j t}$ من اجل جذر حقيقي بسيط λ_j .

(ب) من اجل كل جذر حقيقي λ_j تضاعفه m ، لدينا m حلا :

$$e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda_j t}$$

(ج) من اجل كل ثنائية جذرين عقديين بسيطين $\lambda_j = \sigma_j \pm i\tau_j$ ،

$$\tau_j \neq 0 \quad \text{لدينا حلان} : e^{\sigma_j t} \cos \tau_j t, e^{\sigma_j t} \sin \tau_j t$$

(د) من اجل كل ثنائية جذرين عقديين تضاعفها m لدينا $2m$ حلا :

$$e^{\sigma_j t} \cos \tau_j t, e^{\sigma_j t} \sin \tau_j t, t e^{\sigma_j t} \cos \tau_j t, t e^{\sigma_j t} \sin \tau_j t, \dots$$

$$\dots, t^{m-1} e^{\sigma_j t} \cos \tau_j t, t^{m-1} e^{\sigma_j t} \sin \tau_j t.$$

91. 13 . نتناول الآن الحالة العامة التي يكون فيها المؤثر $A(t)$ في المعادلة:

$$(1) \quad u'(t) = A(t) u(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

متعلقا بالفعل بالوسيط t ؛ في حالة البعد الوحيد لدينا الدستور 21. 13 (2):

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} u_0$$

نستطيع بطبيعة الحال تشكيل المؤثر $W(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ ثم العبارة:

$$e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} u(t_0) = e^{W(t)} u(t_0)$$

لكنها عموما ليست حلا للمعادلة (1). ذلك اننا إذا حاولنا اشتقاق العبارة $e^{W(t)}$ بالنسبة لـ t فإننا نواجه الصعوبة التالية: يصبح من غير الممكن استخدام المساواة

$$e^{W(t)+h\tilde{A}(t; t+h)} = e^{W(t)} e^{h\tilde{A}(t; t+h)}$$

لتحويل الفرق:

$$e^{W(t+h)} - e^{W(t)} = e^{W(t)+h\tilde{A}(t; t+h)} - e^{W(t)}$$

حيث $\tilde{A}(t; t+h)$ يرمز للقيمة المتوسطة للمؤثر $A(\tau)$ من اجل $\tau \in (t; t+h)$ لأن العلاقة $e^{A+B} = e^A e^B$ القائمة من اجل مؤثرين A و B يتبادلان فيما بينهما لا تقوم عموما عندما لا يتبادل A و B . إن المؤثرين $W(t)$ و $\tilde{A}(t; t+h)$ لا يتبادلان في الحالة العامة إذن فإن مشتق $e^{W(t)}$ ليس عموما مساوياً لـ $e^{W(t)} W'(t)$.

على الرغم من ذلك يمكن اعتبار العبارة (2)، بمعنى معين، كحل للمعادلة (1). ندخل الآن مفهوم التكامل الضربي.

لتكن $\Pi = \{a = t_0 \leq \xi_0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n = t\}$ تجزئة

للمجال $a \leq \tau \leq t$ ، نقاطها المعلمة ξ_0, \dots, ξ_{n-1} . نشكل المؤثر:

$$(3) \quad e^{A(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1}} e^{A(\xi_{n-2})\Delta t_{n-2}} \dots e^{A(\xi_0)\Delta t_0}$$

إذا تبادلت المؤثرات $A(\xi_i)$ من أجل i مختلفة، يمكننا وضع هذا المؤثر

على الشكل :

$$e^{A(\xi_0)\Delta t_0} + \dots + A(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1}$$

تؤول العبارة الاخيرة الى النهاية
 لما $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ لكننا رأينا ان هذا المؤثر، عندما لا تتبادل
 $d(\Pi) = \max \Delta t_n \rightarrow 0$

$A(\xi)$ ، لا يمثل حلا للمعادلة (1). يتبين، في حالة عدم تبادل $A(\xi)$ ،
 ان الحل يمكن تمثيله بالمؤثر المحصل عليه من (3) يجعل $d(\Pi)$ يسعى
 الى 0 (راجع التمرين 16). نرسم لهذا المؤثر النهاية بـ:

$$(4) \quad \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$$

ويسمى التكامل الضريبي.

نستطيع، بتقدير لامتناهيات في الصغر من رتب عالية، كتابة:

$$e^{A(\xi_j)\Delta t_j} \approx I + A(\xi_j) \Delta t_j$$

ونستطيع البرهان (التمرين 14) على ان نفس النهاية (4) نحصل عليها
 بالإنطلاق من الجداءات:

$$[I + A(\xi_{n-1}) \Delta \xi_{n-1}] [I + A(\xi_{n-2}) \Delta \xi_{n-2}] \dots [I + A(\xi_0) \Delta \xi_0]$$

لهذا السبب نرسم احيانا للتكامل الضريبي بـ:

$$\prod_{t_0}^t [I + A(t)] dt$$

يمكن استعمال التكاملات الضريبية في تقديرات الحلول. إلا ان مجال
 تطبيقاتها، بالمقارنة مع النظرية العام للوجود، ليس ذا اهمية؛ وعليه لا
 نقدم هنا البراهين على القضايا الواردة.

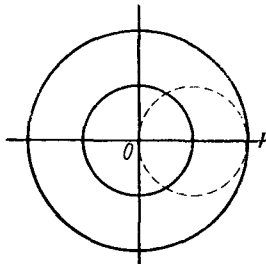
§ 2. 13 . نظرية النقطة الصامدة.

نعتبر في بقية هذا الفصل النظريات الاساسية حول وجود ووحدانية
 حلول المعادلات التفاضلية المعتادة. تعتمد كل هذه النظريات على مبدأ
 هندسي هام في التحليل يسمى مبدأ النقطة الصامدة.

12. 13 . لتكن M مجموعة و A تطبيقاً من هذه المجموعة في نفسها، اي

قانونا يصل كل نقطة $M \ni x$ بنقطة $M \ni y = A(x)$.
 تعريف. تسمى كل نقطة $M \ni x$ يحولها التطبيق A الى نفسه، أي
 $A(x) = x$ ، نقطة صامدة للتطبيق A .

وهكذا إذا تعلق الامر بتطبيق من قرص مستو في نفسه يصل كل
 نقطة بنقطة اخرى وفق دوران حول المركز زاويته 90 درجة، فإن النقطة
 الصامدة الوحيدة هو مركز القرص. إذا كان التطبيق السابق هو التشابه
 الذي مركزه O ونسبته 1:2 متبوعا بانسحاب حتى ملامسة الدائرة الاولى
 (الرسم 3.13) فإن نقطة التماس P نقطة صامدة (على الرغم من إنها ليست
 كذلك بالنسبة للتشابه ولا بالنسبة للانسحاب، المهم هو النتيجة وليس
 طريقة الوصول اليها). اما اذا تعلق الامر بتطبيق من دائرة في نفسها
 بواسطة دوران زاويته 90 درجة فإنه لا يقبل نقطة صامدة.



الرسم 3.13

من المفيد ايجاد شروط عامة (كافية) لوجود نقاط صامدة. نعرض هنا
 واحدة من ابسط النظريات التي تضمن، تحت بعض الشروط على المجموعة
 M والتطبيق A ، وجود ووحداية النقطة الصامدة.

22.13 . نفرض ان M فضاء متري.

تعريف. نقول عن تطبيق A من الفضاء المتري M في نفسه إنه مقلص اذا
 وجد ثابت θ ، $0 \leq \theta < 1$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية من اجل كل
 نقطتين y و z في الفضاء M .

$$\rho(A(y), A(z)) \leq \theta \rho(y, z)$$

نظرية. (مبدأ النقطة الصامدة لبيكار (Picard) وباناخ). يقبل كل تطبيق مقلص A من فضاء مترى تام M في نفسه نقطة ثابتة وحيدة.

البرهان. ننشئ انطلاقاً من نقطة كيفية $x_0 \in M$ متتالية نقاط:

$$x_1 = A(x_0), x_2 = A(x_1) = A^2(x_0), \dots, x_n = A(x_{n-1}) = A^n(x_0), \dots$$

إن هذه المتتالية كوشية في M .

ذلك انه لدينا من اجل كل $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(A^n(x_0), A^{n+1}(x_0)) \leq \\ &\leq \theta \rho(A^{n-1}(x_0), A^n(x_0)) \leq \theta^n \rho(x_0, x_1) \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq [\theta^n + \theta^{n+1} + \dots + \theta^{n+p-1}] \rho(x_0, x_1) \leq \end{aligned}$$

$$(1) \quad \leq \theta^n (1 + \theta + \theta^2 + \dots) \rho(x_0, x_1) = \frac{\theta^n}{1-\theta} \rho(x_0, x_1);$$

تصبح هذه الكمية صغيرة بشكل اختياري عندما يكون n كبيراً بكفاية بما ان M تام فإن النهاية التالية موجودة:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$$

لنثبت ان x نقطة صامدة. لدينا من أجل $n \geq 1$.

$$\rho(A(x), x_n) = \rho(A(x), A(x_{n-1})) \leq \theta \rho(x, x_{n-1}) \rightarrow 0$$

ومنه:

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

وبالتالي فإن x نقطة صامدة بالفعل.

نفرض وجود نقطة صامدة ثانية y : $A(x) = x$ و $A(y) = y$.

عندئذ:

$$\rho(x, y) = \rho(A(x), A(y)) \leq \theta \rho(x, y)$$

إذا كان: $\rho(x, y) \neq 0$ يمكننا تقسيم المساواة على $\rho(x, y)$ فنصل الى

التناقض $1 \leq \theta < 1$. وبالتالي $\rho(x, y) = 0$ اي $x = y$ ولا توجد نقطة

صامدة غير x . انتهى برهان النظرية .

32. 13 . النقاط الصامدة لتطبيقين مقلصين . نقول عن تطبيقين

$A(y)$ و $B(y)$ من فضاء متري M في نفسه انها - متدانيين اذا
تحققت المتراجحة التالية من اجل كل $y \in M$:
$$\rho(A(y), B(y)) \leq \varepsilon$$

توطئة . ليكن $A(y)$ و $B(y)$ تطبيقين مقلصين في فضاء متري تام M
بحيث

$$\rho(B(y), B(z)) \leq \theta_B \rho(y, z) , \quad \rho(A(y), A(z)) \leq \theta_A \rho(y, z)$$

حيث $\theta = \max(\theta_A, \theta_B) < 1$ ، وليكن $\theta_A < 1$ ، $\theta_B < 1$. اذا كان
التطبيقان A و B - متدانيين فإن المسافة التي تفصل نقطتهما الصامدتين
لا تتجاوز $\varepsilon/(1 - \theta)$.

البرهان . لتكن y_0 نقطة صامدة للتطبيق A . يمكن الحصول على النقطة
الصامدة z_0 للتطبيق B حسب الإنشاء 22. 13 ، وهذا باعتبارها نهاية
المتتالية $y_0, B(y_0), B^2(y_0), \dots$. بفضل المتراجحة 22. 13 (1)

$$\rho(y_0, B^n(y_0)) \leq \frac{1}{1-\theta} \rho(y_0, B(y_0)) = \frac{1}{1-\theta} \rho(A(y_0), B(y_0)) \leq \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

عندما ننتقل الى النهاية $n \rightarrow \infty$ نحصل على :

$$\rho(y_0, z_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

وهو المطلوب .

§ 3. 13 . وجود ووحداية حل معادلة تفاضلية في فضاء
نظي .

13. 13 . ليكن B فضاء باناخي و $\Phi(t, x)$ تطبيقا من الفضاء B في
نفسه يتعلق بوسيط حقيقي t ، $a \leq t \leq b$. ليكن $u(t)$ تابعا
شعاعيا قابلا للاشتقاق معرفا على نفس المجال $a \leq t \leq b$ وقيمة في
نفس الفضاء B . إذا عوضنا في التابع $\Phi(t, x)$ المتغير $x \in B$ بالتابع

الشعاعي $u(t)$ نحصل على تابع شعاعي جديد $\Phi [t, u(t)]$ قيمة في الفضاء B ، معرف من اجل $t \in [a, b]$.

نريد حل المعادلة التفاضلية:

$$(1) \quad u'(t) = \Phi [t, u(t)]$$

مع الشرط الابتدائي:

$$(2) \quad u(t_0) = u_0, \quad a < t_0 < b, \quad u_0 \in B$$

إن البحث عن حل للمعادلة التفاضلية (1) مع الشرط الابتدائي (2) يكافئ، عند اتخاذ الفرض الطبيعي الخاص بالاستمرار والذي سنوضحه فيما بعد، البحث عن حل للمعادلة التكاملية:

$$(3) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi [\tau, u(\tau)] d\tau$$

لأن (3) تأتي من (1) و (2) بالمكاملة من t_0 الى t ، ويأتي (2) من (3) بالتعويض $t = t_0$ ، ونحصل على (1) من (3) بالإشتقاق بالنسبة لـ t . وهكذا ترد المسألة الى البحث عن نقطة صامدة للتطبيق:

$$(4) \quad A[x(t)] = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi [\tau, x(\tau)] d\tau$$

في الفضاء المؤلف من التوابع الشعاعية $x(t)$

23. 13. سوف نطبق بطبيعة الحال مبدأ النقطة الصامدة لبيكار - باناخ. لأجل ذلك علينا اعتبار فضاء مترى تام M وتطبيق مقلص A يليق بالمسألة المطروحة.

نختار M الفضاء المؤلف من كل التوابع الشعاعية المستمرة $x(t)$ التي تنتمي قيمها الى B والمعرفة في مجال $[t_0 - h, t_0 + h]$ ، سنشير الى قيمة h ادناه. نزود الفضاء M بالمسافة التالية:

$$\rho [x_1(t), x_2(t)] = \max_{|t-t_0| \leq h} \|x_1(t) - x_2(t)\|$$

ان الفضاء المترى M المحصل عليه بهذه الطريقة فضاء مترى (12 . 32 - ف).

33. 13 . يجب أن يكون التطبيق A من الفضاء M في نفسه، معطى بالدستور 13. 13 (4) . لنوضح الشروط التي يجب فرضها على التابع $\Phi(t, x)$ لكي يكون تعريف التطبيق A سليماً . بصفة خاصة، نفرض ان التطبيق $\Phi(t, x)$ مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرين t و x ؛ يعني ذلك ان من اجل كل t_1 و x_1 و $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta = \delta(t_1, x_1, \varepsilon)$ بحيث

$$\|\Phi(t_1, x_1) - \Phi(t_2, x_2)\| < \varepsilon \text{ عندما يكون } \|x_1 - x_2\| < \delta,$$

$|t_1 - t_2| < \delta$. بهذا الفرض، يكون التابع الشعاعي $\Phi(t, x(t))$ مستمراً بالنسبة لـ t مهما كان التابع المستمر $x(t)$. لذلك نضع من اجل كل t_1 و $\varepsilon > 0$ معلومين $x(t_1) = x_1$ ونبحث عن $\delta > 0$ بحيث

$$\|\Phi(t_1, x_1) - \Phi(t_2, x_2)\| < \varepsilon \text{ عندما } \|x_1 - x_2\| < \delta,$$

$|t_1 - t_2| < \delta$. ثم نبحث عن $\delta_1 > 0$ بحيث $|t_1 - t_2| < \delta_1$ يستلزم المتراجحة $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \delta$. عندئذ، من اجل

$$|t_1 - t_2| < \delta_1 \text{ ، لدينا : } \|\Phi(t_1, x(t_1)) - \Phi(t_2, x(t_2))\| < \varepsilon$$

43. 13 . ثم لكي يتحقق فرض النقطة الصامدة (A تطبيق مقلص) نفرض ان التابع $\Phi(t, x)$ يحقق شرط ليبشيتز وهو: يوجد ثابت C بحيث:

$$(1) \quad \|\Phi(t, x_1) - \Phi(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\|$$

وهذا من اجل كل عنصرين x_1 و x_2 في B .

لنبين ان التطبيق 13. 13 (4) مقلص، على الاقل، من اجل h صغير بكفاية ضمن الشروط المذكورة. لدينا بالفعل، من اجل كل نقطتين من الفضاء M اي تابعين شعاعيين $x(t)$ و $y(t)$ معرفين على $[t_0 - h, t_0 + h]$ ومستمرين:

$$(2) \quad \rho(A[x(t)], A[y(t)]) = \max_{|t-t_0| \leq h} \|A[x(t)] - A[y(t)]\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left\| \int_{t_0}^t \{\Phi(\tau, x(\tau)) - \Phi(\tau, y(\tau))\} d\tau \right\| \leq \\
&\leq h \max_{|t-t_0| \leq h} \|\Phi(t, x(t)) - \Phi(t, y(t))\| \leq \\
&\leq Ch \max_{|t-t_0| \leq h} \|x(t) - y(t)\| = Ch\rho(x, y),
\end{aligned}$$

حتى يكون التطبيق مقلصا يكفي اختيار $1/C > h$.

53. 13. من حقنا الآن تطبيق مبدأ النقطة الصامدة للبرهان على وجود ووحداية حل المعادلة 13. 13 (1) مع الشرط الابتدائي 13. 13 (2). إن هذا الحل معرف الآن فقط على $[t_0 - h, t_0 + h]$ لكنه من الممكن بتطبيق النتيجة المثبتة بصفة متوالية، ان نمدد هذا الحل ليكون معرفا على كل المجال $[a, b]$. يتم ذلك بتثمين القيمة $h = 2/(3C)$ وتطبيق النظرية المبرهنة على نفس المعادلة التفاضلية 13. 13 (1) باعتبار الشرط الابتدائي.

$$t_1 = t_0 + h, \quad u^*(t_1) = u(t_1)$$

حيث $u(t_1)$ هي قيمة الحل المشيد على $[t_0 - h, t_0 + h]$ عند $t = t_1$. نصل الى حل جديد $u^*(t)$ معرف على المجال $[t_1 - h, t_1 + h]$. ثم إن وحدانية الحل تبين ان $u^*(t)$ و $u(t)$ متطابقان على الجزء المشتركة من ساحتي تعريفهما يتعلق الامر اذن بجل المعادلة 13. 13 (3) المعرفة على المجال $[t_0 - h, t_0 + 2h]$. بمواصلة هذه العملية عدداً متتهياً من المرات نصل الى تعريف حل على كل المجال $[a, b]$.

برهنا في الاخير على النظرية التالية:

نظرية. إذا كان التابع $\Phi(t, x)$ معرفا من اجل $a \leq t \leq b$ ، $x \in B$ ، ومستمرًا بالنسبة لمجموعة المتغيرين ويتمتع على كل المجال $a \leq t \leq b$ بشرط ليبشيتز 13. 43 (1)، فإن المعادلة 13. 13 (1) مع الشرط 13. 13 (2) يقبل حلا $u = u(t)$ معرفا على كل المجال $[a, b]$ وهو وحيد في صف كل التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق $x(t)$ ، $[a, b] \ni t$ ،

التي تأخذ قيمها في الفضاء B .

13. 63. نشير الى الحالة التي يكون فيها التابع الشعاعي $\Phi(t, x)$ ، من اجل كل $t \in [a, b]$ ، يطبق فضاء جزئياً مغلقاً مثبتاً $B_1 \subset B$ في نفسه ، عندئذ إذا اخترنا شعاعاً ابتدائياً u_0 في نفس الفضاء الجزئي B_1 فإن الحل الموافق له $u(t)$ ينتمي الى الفضاء الجزئي B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$. ذلك اننا نستطيع في هذه الوضعية ، من البداية اعتبار الفضاء الجزئي B_1 بدل الفضاء B . نصل الى حل في الفضاء الجزئي B_1 ؛ بمراعاة نظرية الوحدانية فإنه لا يوجد في الفضاء B اي حل للمعادلة 13. 13 (1) التي تحقق الشرط $B_1 \ni u(t_0) = u_0$.

13. 73. الحل بصفته تابعا مستمرا للشعاع الابتدائي . نرمز هنا لحل المعادلة 13. 13 (1) مع الشرط الابتدائي 13. 13 (2) ب: $u(t; t_0, u_0)$. إنه تابع يصل كل شعاع $u_0 \in B$ بالشعاع $u(t; t_0, u_0)$ الذي يتعلق بـ t_0 و t بصفتهما وسيطين عددين . لنثبت ، باعتبار فرض النظرية 13. 53 ، من اجل t_0 و t مثبتين ، ان الشعاع $u(t; t_0, u_0)$ تابع مستمر لـ u_0 .
نعتبر التطبيقين :

$$A[x(t)] = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi[\tau, x(\tau)] d\tau$$

$$B[x(t)] = u_1 + \int_{t_0}^t \Phi[\tau, x(\tau)] d\tau$$

نقطتهما الصامدتان حلان للمعادلة 13. 13 (1) بالشعاعين الابتدائيين u_0 و u_1 على التوالي . نلاحظ في الفضاء M المؤلف من التوابع الشعاعية $x(t)$ المعرفة والمستمرة على $[t_0 - h, t_0 + h]$ ، حيث $h < 1/C$ ، انها تطبيقات مقلصة بنفس القيمة $\theta = Ch < 1$. إذا كان : $|u_0 - u_1| < \epsilon$ فان هذين التطبيقين ع (13 . 32) اذن فان المسافة التي

تفصل نقطتيهما الصامدتين لا تتجاوز $\varepsilon/(1 - \theta)$. بعبارة اخرى .

$$\max_{|t-t_0| \leq h} |u(t; t_0, u_0) - u(t; t_0, u_1)| < \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

وهكذا إذا كان الفرق بين الحلين عند $t = t_0$ اصغر من ε فهو اصغر من $\varepsilon/(1 - \theta)$ في المجال: $|t - t_0| \leq h$. إذا حولنا النقطة الابتدائية من t_0 الى $t_1 = t_0 + h$ نحصل ، كما في 53.13 ، على امكانية تمديد الحل في المجال: $t_0 \leq t_0 + h \leq t_0 + 2h$ ؛ بتكرار هذه العملية نرى ان انحراف الحلين في هذا المجال لا يتجاوز $\varepsilon/(1 - \theta)^2$. نواصل العملية فنصل الى المتراجحة:

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t; t_0, u_0) - u(t; t_0, u_1)| < \frac{\varepsilon}{(1-\theta)^m}$$

حيث: $m = \left[\frac{b-a}{h} \right] + 1$ ؛ انتهى برهان القضية.

83.13 . المؤثرات الحالة . ليكن $u_0 \in B$ شعاعا كيفيا و $u(t)$ حلا للمعادلة 13.13 (1) مع الشرط $u(t_0) = u_0$ كشرط ابتدائي . ان الشعاع $u = u(t)$ معرف بطريقة وحيدة من اجل كل $t \in [a, b]$. إنه يتعلق بـ u_0 وكذا بـ t_0 و t . نشير لذلك كما يلي: $u(t) = \Omega_{t_0}^t(u_0)$

يرمز $\Omega_{t_0}^t$ هنا لتطبيق من الفضاء B في نفسه ويسمى مؤثرا حالاً للمعادلة 13.13 (1) .

وهكذا فإن المؤثر الحال للمعادلة الخطية المتجانسة $u'(t) = Au(t)$

يكتب على الشكل (13.13) :

$$\Omega_{t_0}^t = e^{(t-t_0)A}$$

أ . يبين 73.13 ان المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ مستمر: إذا آلت متتالية اشعة:

من الفضاء B الى شعاع u_0 ، $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \dots, u_0^{(n)}, \dots$

فإن المتتالية الموافقة لها : $u_1^{(n)} = \Omega_{t_0}^t(u_0^{(n)})$ تؤول الى الشعاع

$$u_1 = \Omega_{t_0}^t(u_0)$$

ب. من البهديهي ان $\Omega_{t_0}^{t_0}(u_0) = u_0$ بحيث ان $\Omega_{t_0}^t = E$ مؤثر مطابق.

ج. لنبرهن على المساواة:

$$(1) \quad \Omega_{t_0}^{t_2} = \Omega_{t_1}^{t_2} \Omega_{t_0}^{t_1}$$

وهذا مهما كان t_0, t_1, t_2 في $[a, b]$.

ليكن $u_1 = \Omega_{t_0}^{t_1}(u_0)$ و $u_2 = \Omega_{t_1}^{t_2}(u_1)$ ان الشعاع u_1 هو قيمة الحل $u(t)$ للمعادلة 13.13 (1) عند $t = t_1$ وهو الحل الذي يأخذ القيمة u_0 عند $t = t_0$. اما الشعاع u_2 فهو قيمة الحل، من اجل $t = t_2$ ، الذي يأخذ القيمة u_1 عند $t = t_1$. بمراعاة وحدانية الحل نلاحظ ان هذين الحلين متطابقان، وهو ما يثبت (1).

د. بوضع $t_2 = t_0$ في (1) نجد $E = \Omega_{t_1}^{t_0} \Omega_{t_0}^{t_1}$ ومنه يتبين أن المؤثر $\Omega_{t_0}^{t_0}$ يقبل القلب.

ر. يمكن ان نضع المساواة $\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t)$ على الشكل:

$$(2) \quad \frac{d(\Omega_{t_0}^t(u_0))}{dt} = A(t) [\Omega_{t_0}^t(u_0)].$$

أو:

$$(3) \quad \frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} = A(t) \Omega_{t_0}^t$$

هذا مع فهم الرمز الاخير على ان المساواة (2) محققة من اجل كل

عنصر $u_0 \in B$.

93.13. فرضنا ان التابع $\Phi(t, x)$ معرف من اجل كل $t \in [a, b]$ و $x \in B$. يمكن البرهان على وجود ووحداية حل المعادلة 13.13 (1) في جواد نقطة t_0 مع الشرط 13.13 (2) باعتبار افتراضات اضعف وهي:

يجب ان يكون التابع $\Phi(t, x)$ معرفاً من اجل $a \leq t \leq b$ ولا يجب ان يكون مستمراً ويحقق شرط ليبشيتز الآ في كره:

$$V = \{x \in B: \|x - u_0\| \leq r\}.$$

في هذه الحالة، إذا كان h صغيراً بكفاية فإن المؤثر A يحول كل تابع مستمر $x(t)$ قيمة في الكرة V الى تابع قيمة في نفس الكرة. وبالتالي يمكن انجاز البرهان على وجود ووحداية الحل بتعويض الفضاء المترى المؤلف من كل التوابع $x(t)$ المستمرة على $[t_0 - h, t_0 + h]$ بالفضاء المترى M_V المؤلف من التوابع $x(t)$ التي تأخذ قيمها في الكرة V . الآ ان التابع المحصل عليه عموماً لا يقبل التمديد على كل المجال $a \leq t \leq b$.

هناك وضعية مماثلة في الحالة التي يكون فيها التابع $\Phi(t, x)$ معرفاً ومستمراً من اجل $a \leq t \leq b$ ، في كل الفضاء B ، لكن الثابت C في شرط ليبشيتز يتعلق بالمسافتين من مصدر الاحداثيات الى النقطتين x_1 و x_2 بحيث اي شرط ليبشيتز يأخذ الشكل:

$$\|\Phi(t, x_1) - \Phi(t, x_2)\| \leq C(r) \|x_1 - x_2\|$$

وهذا مهما كان x_1 و x_2 في الكرة $\|x\| \leq r$. ان الحل موجود في هذه الحالة، كما هو الحال آنفا، ووحيد في جوار للقيمة $t_0 \in [a, b]$ ، لكنه لا يقبل عموماً التمديد حتى حافة المجال $[a, b]$.

نعتبر على سبيل المثال المعادلة $x'(t) = x^2(t)$ على المجال $-1 \leq t \leq 1$. إن طرفها الثاني مستمر من اجل كل $x \in R_1$ ؛ لدينا:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq 2r |x_1 - x_2|$$

وهذا مهما كان x_1 و x_2 في المجال $|x| \leq r$. إن الشكل الذي يأخذه حل المعادلة المعطاة باعتبار الشرط الابتدائي $x(0) = x_0$ هو:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

وهو لا يقبل التمديد على كل المجال $-1 \leq t \leq 1$ ان كان $|x_0| \geq 1$

مهما كانت العناصر: $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ ،
 البالغ عددها $2n$ ، في الفضاء B .

24. 13 . لدينا النظرية التالية:

نظرية. اذا كانت التوابع $\Phi_h(t, x_1, \dots, x_n)$ مستمرة بالنسبة لمجموعة المتغيرات t, x_1, \dots, x_n ، وتحقق شرط ليبشيتنز بالنسبة للمتغيرات x_1, \dots, x_n فإن الجملة (1) 14. 13 بالشروط (2) 14. 13 تقبل حلا $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ وحيدا في صنف كل العناصر $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ التي يمكن انشاؤها بواسطة التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق الآخذة قيمها في الفضاء B .

البرهان. ننشئ فضاء شعاعيا نظيميا جديداً B^n المؤلف من العناصر $x = (x_1, \dots, x_n)$ المشكلة من n عنصرا تنتمي الى الفضاء B . تم العمليتان الخطيتان في الفضاء B^n احدائية: احدائية اذا كان $x = (x_1, \dots, x_n) \in B^n$ و $y = (y_1, \dots, y_n) \in B^n$ فإن:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

تثبت الخاصيات اللازمة للعمليتين الخطيتين اللتين ادخلناهما آنفا انطلاقا من الخاصيات المناسبة لها الخاصة بالعمليتين الخطيتين في الفضاء B . ثم نختار في B^n النظم:

$$(1) \quad |||x||| = \sum_{j=1}^n ||x_j||.$$

تستنتج الخاصيات اللازمة للنظم في الفضاء B^n ، بسهولة، من الخاصيات المناسبة لها الخاصة بالنظم في الفضاء B . إن التقارب بالنظم (1) في الفضاء B^n هو التقارب بالنسبة لكل احدائية في الفضاء B . أخيراً. بما ان الفضاء

B تام، نستطيع البرهان بسهولة على نفس الخاصية فيما يخص B^n

يمكن اعتبار جملة التوابع:

$$(4) \quad u(t_0) = p = (p_1, \dots, p_n) \in B^n$$

تقبل حلا $u(t)$ معرفا من اجل $t \in [a, b]$ وه ل وحيد في صنف التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق $x(t)$ التي تأخذ قيمها في الفضاء B^n . بما أن، طبقا للتعريف:

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)), \quad u'(t) = (u'_1(t), \dots, u'_n(t)),$$

المعادلة التفاضلية (3) بالشرط (4) من اجل تابع $u(t)$ تكافىء الجملة 14.13 (1) بالشروط 14.13 (2) من اجل التوابع $u_1(t), \dots, u_n(t)$. انتهى برهان النظرية.

34.13. إذا وجد فضاء جزئي مغلق $B_1 \subset B$ بحيث تكون، من اجل كل

$$\Phi_h(t, x_1, \dots, x_n) \text{ قيم } , x_1, x_2, \dots, x_n \in B_1 \text{ و } t \in [a, b]$$

، $k = 1, \dots, n$ والاشعة الابتدائية p_1, \dots, p_n منتمية الى B_1 ، فإن قيم كل التوابع $u_1(t), \dots, u_n(t)$ التي تمثل حل الجملة 14.13 (1) بالشروط 14.13 (2)، تنتمي هي الاخرى الى الفضاء B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$.

لرؤية ذلك نعتبر في B^n . الفضاء الجزئي B_1^n المؤلف من الاشعة: $x = (x_1, \dots, x_n)$ التي تنتمي كل احداثية لها الى الفضاء الجزئي $B_1 \subset B$. من السهل اثبات ان B_1^n مغلق في B^n . ان التحويل 24.13 (2) يطبق فرضا B_1^n في نفسه. وبالتالي، عند مراعاة الملاحظة 93.13، إذا كان الشعاع (p_1, \dots, p_n) ينتمي الى B_1^n ، فإن الامر كذلك بالنسبة للحل: $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ من اجل كل $t \in [a, b]$ ، وهو المطلوب.

§ 5.13 المعادلات الشعاعية من الرتب العالية.

15.13. نعتبر مرة اخرى فضاء باناخي B وليكن $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ تابعا لوسيط حقيقي t ، $a \leq t \leq b$ ولـ n نقطة x_1, \dots, x_n من الفضاء B قيمة في نفس الفضاء. لتكن:

$$(1) \quad u^{(m)}(t) = \Phi(t, u(t), \dots, u^{(m-1)}(t))$$

معادلة تفاضلية من الرتبة m ، مرفوفة بالشروط الابتدائية:

$$(2) \quad u(t_0) = p_1 \in B, \quad u'(t_0) = p_2 \in B, \dots, u^{(m-1)}(t_0) = p_m \in B$$

نظرية. إذا كان التابع $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ مستمراً بالنسبة لمجموعة المتغيرات x_1, \dots, x_m ، وتمتع بشرط ليبشيتز بالنسبة للمتغيرات x_1, \dots, x_m فان المعادلة (1) مع الشروط (2) تقبل حلاً $u = u(t)$ وحيداً في صنف كل التوابع القابلة للإشتقاق m مرة: $x(t)$ التي تأخذ قيمها في B .

البرهان. بالإضافة الى المعادلة (1) والشروط (2) نعتبر جملة المعادلات التفاضلية:

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= u_3(t), \\ &\dots \dots \dots \\ u_{m-1}'(t) &= u_m(t), \\ u_m'(t) &= \Phi(t, u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{aligned} \right\}$$

بالشروط الابتدائية

$$(4) \quad u_1(t_0) = p_1, \dots, u_m(t_0) = p_m.$$

إن الجملة (3) حالة خاصة من الجملة 14.13 (1) نحصل عليها بوضع.

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} \Phi_1(t, x_1, \dots, x_m) &\equiv x_2, \\ \Phi_2(t, x_1, \dots, x_m) &\equiv x_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi_{m-1}(t, x_1, \dots, x_m) &\equiv x_m, \\ \Phi_m(t, x_1, \dots, x_m) &\equiv \Phi(t, x_1, \dots, x_m). \end{aligned} \right\}$$

نلاحظ في هذه الحالة أن كل التوابع:

$$\Phi_k(t, x_1, \dots, x_m) \quad (k = 1, \dots, m)$$

مستمرة بالنسبة لمجموعة المتغيرات t, x_1, \dots, x_m وتحقق شرط ليبشيتز بالنسبة للمتغيرات x_1, \dots, x_m ؛ ذلك امر بديهي من اجل التوابع Φ_k الاولى حتى الرتبة $m - 1$ ، اما فيما يتعلق بالتابع الاخير فالنتيجة يعطيها الفرض.

وبالتالي ، بمراعاة النظرية 24.13 ، فإن الجملة (3) بالشروط (4) تقبل

حلا $u_1(t), \dots, u_m(t)$. نضع $u(t) \equiv u_1(t)$. تبين المعادلة الاولى من الجملة (3) أن $u'(t) = u_2(t)$ ، وتبين الثانية أن $u''(t) = u_3(t) = u_3(t)$ ، الخ؛ تثبت المعادلة ذات الرتبة $(m-1)$ أن $u^{(m-1)}(t) = u_{m-1}'(t) = u_m(t)$ وفي الختام تبين المعادلة الاخيرة أن:

$$u^{(m)}(t) = u_m'(t) = \Phi(t, u, u', \dots, u^{(m-1)})$$

وهكذا يتضح ان التابع الشعاعي $u(t)$ يحقق المعادلة (1). بما ان الشروط (4) محققة ايضا، فإن هذا التابع يحقق الشروط (2). وعليه تقبل المعادلة (1) مع الشروط (2) حلا. لنثبت ان هذا الحل وحيد. إن كان $\bar{u}(t)$ حلا كفيما للمعادلة (1) مع الشروط (2) فإن جملة التوابع:

$$\bar{u}_1(t) \equiv \bar{u}(t), \bar{u}_2(t) \equiv \bar{u}'(t), \dots, \bar{u}_m(t) \equiv \bar{u}^{(m-1)}(t)$$

تحقق بطبيعة الحال الجملة (3) بالشروط (4)؛ ثم إن النظرية 24.13 تبين ان حل الجملة (3) مع الشروط (4) وحيد، ولذا:

$$\bar{u}(t) \equiv \bar{u}_1(t) \equiv u_1(t) \equiv u(t).$$

وهو المطلوب.

25.13. نفرض وجود فضاء جزئي مغلق $B_1 \subset B$ بحيث يأخذ التابع $\Phi(t, x_1, \dots, x_m)$ قيمة في B_1 مهما كان $t \in [a, b]$ و

$$x_1 \in B_1, \dots, x_m \in B_1$$

إذا كانت زيادة على ذلك الاشعة p_1, \dots, p_m الواردة في الشروط الابتدائية للمعادلة (1) تنتمي هي الاخرى الى الفضاء الجزئي B_1 فإن الحل الموافق لذلك $u(t)$ ينتمي ايضا الى B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$.

ذلك أن، ضمن الشروط الواردة، كل توابع الجملة 15.13 (5) تأخذ قيمها في B_1 إن كان: $x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_1$. ينتج من بفضل الملاحظة 35.12 ان $p_1 \in B_1, \dots, p_m \in B_1$.

$t \in [a, b]$. من أجل كل $u_1(t) \in B_1, \dots, u_m(t) \in B_1$

بما أن: $u_1(t) \equiv u(t)$ فإننا نصل الى النتيجة المطلوبة.

§ 13 6 المعادلات والجمل الخطية.

16. 13. نعتبر مؤثرا خطيا محدودا $A(t)$ في فضاء شعاعي نظمي B

يتعلق بوسيط $t, a \leq t \leq b$. نقول عن المؤثر $A(t)$ انه يتعلق

باستمرار بـ t إذا استطعنا من أجل كل $\varepsilon > 0$, إيجاد $\delta > 0$ بحيث:

$$\|A(\bar{t}) - A(t)\| < \varepsilon \text{ عندما يكون } |\bar{t} - t| < \delta \text{ (يرمز هنا}$$

|| لنظيم مؤثر خطي (17. 12 - ب)).

نقول عن تابع $\Phi(t, x)$ قيمه في الفضاء B إنه من الدرجة الاولى

بالنسبة للمتغير $x \in B$ إن كان:

$$\Phi(t, x) = A(t)x + b(t),$$

حيث $A(t)$ مؤثر خطي محدود يتعلق باستمرار بالوسيط t و

$b(t)$ تابع مستمر قيمه في الفضاء B .

لنثبت ان كل تابع $\Phi(t, x)$ من النمط (1) مستمر بالنسبة لمجموعة

المتغيرين x, t .

يمكن اعتبار المؤثر $A(t)$ كتابع مستمر لـ t قيمه في الفضاء النظمي

$L(B)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية المحدودة في B (37. 12 - أ).

إن مثل هذا التابع محدود بالضرورة على المجال $a \leq t \leq b$, إذن:

$$\sup_{a \leq t \leq b} \|A(t)\| \equiv A < \infty.$$

من أجل $\varepsilon > 0$, t, x معلومة، نبحث عن $\delta = \delta(\varepsilon, t, x)$ بحيث

نحصل على المتراجحتين:

$$\|x\| \|A(\bar{t}) - A(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|b(\bar{t}) - b(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

وهذا لما $|\bar{t} - t| < \delta$. حينئذ نحصل من أجل نفس الاعداد t

13. 56. المعادلات الخطية من الرتب العالية. نعتبر معادلة خطية من الرتبة n

$$(1) \quad u^{(n)}(t) = A_1(t)u(t) + \dots + A_n(t)u^{(n-1)}(t) + b(t)$$

بالنسبة للتابع المجهول $u(t)$ الذي يأخذ قيمه في الفضاء B ، مع الشروط الابتدائية:

$$(2) \quad u(t_0) = p_1 \in B, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = p_n \in B.$$

يمثل هنا $A_n(t)$ ، من اجل كل $t \in [a, b]$ ، مؤثرا خطيا محدودا في الفضاء B ، اما $b(t)$ فهو تابع مستمر قيمه في نفس الفضاء. نظرية. تقبل المعادلة الخطية (1) بالشروط الابتدائية (2) حلا $u(t)$ وحيدا في صنف كل التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق n مرة، التي تأخذ قيمها في الفضاء B .

البرهان. إن المعادلة (1) حالة خاصة من المعادلة المعتبرة في 15. 13:

$$u^{(n)}(t) = \Phi(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}).$$

نحصل على هذه الحالة بوضع:

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = A_1(t)x_1 + \dots + A_n(t)x_n + b(t).$$

كنا رأينا في 36. 13 ان التابع Φ مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرات t, x_1, \dots, x_n وتحقق شرط ليبشيتز بالنسبة لـ x_1, \dots, x_n . وعليه فإن النظرية 15. 13 قائمة. بتطبيق هذه النظرية نحصل على النتيجة المطلوبة.

13. 66. إذا طبقت المؤثرات $A_1(t), \dots, A_n(t)$ ، من اجل كل

$$t \in [a, b], \text{ فضاء جزئيا مشبعا } B_1 \subset B \text{ في نفسه وإذا كان التابع } b(t)$$

يأخذ قيمه في هذا الفضاء الجزئي فإن الحل $u(t)$ للمعادلة 13. 56 (1)

بالشروط 13. 56 (2) ينتمي، مهما كانت الاشعة الابتدائية p_1, \dots, p_n

في B_1 ومهما كان $t \in [a, b]$ ، الى الفضاء الجزئي B_1 .

لتأكد من ذلك نلاحظ، ضمن الشروط الواردة، ان فرض الملاحظة

46. 13 محقق؛ بتطبيق هذه الملاحظة نحصل بصفة خاصة على ان

المطلوب .
 $u_1(t) \equiv u(t)$ ينتمي الى B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$ ، وهو

§ 7. 13 . المؤثر الحال لمعادلة خطية متجانسة .

17. 13 . تسمى المعادلة (1) 26. 13 لما $b(t) \equiv 0$:

$$u'(t) = A(t) u(t)$$

معادلة خطية متجانسة .

تقبل المعادلة المتجانسة حلا بديهيا $u(t) \equiv 0$. اما باقي الحلول للمعادلة المتجانسة فهي لا تنعدم في اية نقطة $t \in [a, b]$ حسب نظرية الوحدة 26. 13 .

يجمع حلول للمعادلة المتجانسة (1) او ضربها في اعداد نحصل على حلول أخرى لنفس المعادلة . إذا انه اذا كان $u_1(t)$ و $u_2(t)$ حلين للمعادلة (1) فإن لدينا ، مها كان العدان α_1 و α_2 ،

$$\begin{aligned} (\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t))' &= \alpha_1 u_1'(t) + \alpha_2 u_2'(t) = \\ &= \alpha_1 A(t) u_1(t) + \alpha_2 A(t) u_2(t) = \\ &= A(t) [\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)], \end{aligned}$$

إذن فإن $\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$ حل للمعادلة (1) . نعتبر المؤثر الحال $\Omega_{t_0}^t$ (83. 13) للمعادلة المتجانسة (1) . إن هذا المؤثر خطي أي ان لدينا المساواة التالية مها كان الشعاعان u_1 ، u_2 والعدان α_1 ، α_2 :

$$\Omega_{t_0}^t [\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 \Omega_{t_0}^t (u_1) + \alpha_2 \Omega_{t_0}^t (u_2).$$

ذلك ان الطرف الثاني باعتباره تابعا لـ t عبارة خطية لحلول للمعادلة (1) ، قيمتها عند $t = t_0$ هي : $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. يتبين مما سبق ان راينا ان الطرف الثاني حل للمعادلة (1) . اما الطرف الاول فهو حسب التعريف حل للمعادلة (1) يأخذ القيمة $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ عند $t = t_0$. إن هذه الحلول تتطابق من اجل كل $t \in [a, b]$ حسب

بما ان المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ قابل للقلب فإن المصفوفة (2) غير منحلة من اجل كل $t \in [a, b]$ ، والمعين الورونسكي لا ينعدم عند اي $t \in [a, b]$ ؛ وهكذا فإن الحلول $f_1(t), \dots, f_n(t)$ المستقلة خطيا عند $t = t_0$ تبقى كذلك من اجل كل $t \in [a, b]$.
 أنشيء الحل العام 17.13 (1) بالشعاع الابتدائي (من اجل $t = t_0$)

$$u = \sum_{k=1}^n u_k f_k$$
 حسب الدستور العام:

$$u(t) = \Omega_{t_0}^t u = \Omega_{t_0}^t \sum_{k=1}^n u_k f_k = \sum_{k=1}^n u_k \Omega_{t_0}^t f_k ;$$

وبالتالي فإن كل حل للجملية (1) عبارة خطية من n حلا خاصا:
 $f_1(t), \dots, f_n(t)$.

نرى في الحالة الراهنة ان فضاء كل حلول الجملية (1) ذو بعد n وان التوابع الشعاعية $f_1(t), \dots, f_n(t)$ تشكل اساسا لهذا الفضاء. تسمى مجموعة التوابع الشعاعية $f_1(t), \dots, f_n(t)$ جملة اساسية من حلول الجملية (1).

37. 13 . حساب المعين الورونسكي . يمكن ان نسمي المعين الورونسكي .

$$(1) \quad [f_1(t), \dots, f_n(t)] = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

بالمقارنة مع الجبر الشعاعي ، « الجداء المختلط » للأشعة $f_1(t), \dots, f_n(t)$. اما عناصر هذا الجداء فهي التوابع القابلة للإشتقاق $f_{jk}(t)$ وبالتالي فهو قابل للإشتقاق . إذا اشتققناه حسب القاعدة 41.7 - س ، نجد :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f_1(t), \dots, f_n(t)] &= [f_1'(t), f_2(t), \dots, f_n(t)] + \\ &+ [f_1(t), f_2'(t), \dots, f_n(t)] + \dots + [f_1(t), \dots, f_n'(t)] = \\ &= [A(t) f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)] + [f_1(t), A(t) f_2(t), \dots, f_n(t)] + \dots \\ &\dots + [f_1(t), f_2(t), \dots, A(t) f_n(t)]. \end{aligned}$$

إن المركبة الوحيدة التي تعتبر ذات أهمية في الحد ذي الرتبة k في المجموع الموجود هي المركبة وفق الشعاع $f_k(t)$ ، إذ إن كل مركبة أخرى تؤدي إلى معين له عمودان متطابقان وعليه فهو منعدم. أما قيمة المركبة المشار إليها فتساوي $a_{kk}(t) f_k(t)$. نجد في الختام:

$$(2) \frac{d}{dt} [f_1(t), \dots, f_n(t)] = (a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)) [f_1(t), \dots, f_n(t)].$$

يمثل المقدار $\text{tr } A(t) = a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)$ أثر المصفوفة $A(t)$ بمكاملة المعادلة (2) نجد:

$$(3) [f_1(t), \dots, f_n(t)] = [f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)] e^{\int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau}$$

نذكر أن المقدرا $\text{tr } A(t)$ لا يتعلق باختيار الأساس f_1, \dots, f_n (*).

47. 13. المعادلة ذات الرتبة n . رأينا في 15. 13 أن المعادلة:

$$(1) y^{(n)}(t) = a_n(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + b(t)$$

تكافئ الجملة

$$(2) \begin{cases} u_1'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) = u_3(t), \\ \dots \\ u_n'(t) = a_1(t) u_1(t) + a_2(t) u_2(t) + \dots + a_n(t) u_n(t) + b(t), \end{cases}$$

حيث:

$$u_1(t) = y(t), \quad u_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad u_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

وهكذا فإن كل شعاع حل $u_1(t), \dots, u_n(t)$ يوافق مجموعة

توابع $y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$. طبقا لـ 27. 13 فإن

كل حل $w(t)$ للمعادلة المتجانسة:

$$(3) w^{(n)}(t) = a_n(t) w^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) w_1(t)$$

يمكن وضعه بطريقة وحيدة على الشكل:

$$w(t) = C_1 w_1(t) + \dots + C_n w_n(t),$$

* راجع مثلاً [14، 35.5]

حيث $w_1(t), \dots, w_n(t)$ هو الحل الموافق لمصفوفة غير منحلة للمعطيات الابتدائية:

$$\left\| \begin{array}{ccc} w_1(t_0) & \dots & w_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_1^{(n-1)}(t_0) & \dots & w_n^{(n-1)}(t_0) \end{array} \right\| = W[w_1(t_0), \dots, w_n(t_0)].$$

تبقى عندئذ مصفوفة الحلول (المصفوفة الورونسكية):

$$\left\| \begin{array}{ccc} w_1(t) & \dots & w_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_1^{(n-1)}(t) & \dots & w_n^{(n-1)}(t) \end{array} \right\| = W[w_1(t), \dots, w_n(t)]$$

غير منحلة من اجل كل $t \in [a, b]$. اما معيها فهو يساوي حسب

الدستور 37.13 (3) وبمراعاة الشكل الخاص لمصفوفة الجملة (2):

$$\det W[w_1(t), \dots, w_n(t)] = \det W[w_1(t_0), \dots, w_n(t_0)] e^{\int_{t_0}^t a_n(\tau) d\tau}$$

§ 8.13 حل معادلة خطية غير متجانسة.

18.13 . تسمى المعادلة:

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

حيث $b(t) \not\equiv 0$ معادلة خطية غير متجانسة. نلاحظ بطبيعة

الحال ان الفرق $v_1(t) - v_2(t)$ حلين $v_1(t)$ و $v_2(t)$ لمعادلة

غير متجانسة حل للمعادلة المتجانسة الموافقة لها. وبالتالي إذا كان

$v_1(t)$ حلا خاصا للمعادلة غير المتجانسة (الحل المساوي 0 عند

$t = t_0$) وعرفنا المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ فإننا نستطيع الحصول على اي حل

للمعادلة غير المتجانسة (الحل المساوي لـ v_0 عند $t = t_0$) بواسطة

$$v(t) = v_1(t) + \Omega_{t_0}^t v_0 \quad \text{الدستور:}$$

بمعرفة المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ يمكننا انشاء الحل $v(t)$ بطريقة تغيير الثابت.

نبحث عن $v_1(t)$ بكتابته على النحو:

$$(2) \quad v_1(t) = \Omega_{t_0}^t C(t),$$

حيث $C(t)$ شعاع متغير مجهول (لو لم يكن $C(t)$ متعلقا بـ t .

لحصلنا على حل لمعادلة متجانسة، وهو ما يبرر تسمية هذه الطريقة).
 للحصول على $v_1(t_0) = 0$ ننشئ الشعاع $C(t)$ بحيث يكون
 $C(t_0) = 0$.

من 83.13 - ر والتوطئة 31.13 يأتي:

$$(3) \quad v_1'(t) = (\Omega_{t_0}^t)' C(t) + \Omega_{t_0}^t C'(t) = A(t) \Omega_{t_0}^t C(t) + \Omega_{t_0}^t C'(t).$$

من جهة اخرى:

$$(4) \quad A(t) v_1(t) + b(t) = A(t) \Omega_{t_0}^t C(t) + b(t).$$

يجعل طرفي اليمين في (3) و (4) متساويين نجد:

$$(5) \quad \Omega_{t_0}^t C'(t) = b(t).$$

نطبق بعد ذلك المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ ، وهو المؤثر العكسي لـ $\Omega_{t_0}^t$ 83.13
 - د، على طرفي المساواة (5) فنحصل على:

$$C'(t) = \Omega_{t_0}^t b(t),$$

ومنه:

$$C(t) = \int_{t_0}^t \Omega_{t_0}^{\tau} b(\tau) d\tau,$$

وهذا باختيار الشعاع الذي ينعدم عند $t = t_0$.

اخيرا نصل الى الدستور:

$$(6) \quad v(t) = \Omega_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Omega_{t_0}^{\tau} b(\tau) d\tau + \Omega_{t_0}^t v_0 = \Omega_{t_0}^t v_0 + \int_{t_0}^t \Omega_{t_0}^t b(\tau) d\tau.$$

يمكننا الآن البرهان على قيام هذه المساواة مباشرة باستخدام قاعدة
 الاشتقاق 68.9 - ب (التي تمتد صلاحيتها بسهولة على التوابع الشعاعية).

28.13 . إذا كان $B = R_1$ و $A(t)$ تابعا عدديا، نجد (21.13):

$$\Omega_{t_0}^t = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau};$$

وبالتالي:

$$(1) \quad v(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} v_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\theta} A(\theta) d\theta} b(\tau) d\tau.$$

بصفة خاصة، إن كان $A(t) \equiv A$ ، فإن:

$$(2) \quad v(t) = e^{(t-t_0)A} v_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} b(\tau) d\tau$$

38. 13. إن الدستورين 18. 13 (6) و 28. 13 (1) قائمان أيضا في الحالة العامة التي يكون فيها $u(t)$ تابعا شعاعيا قيمه في فضاء نظمي B و $A(t)$ مؤثرا خطيا في B. اما الرموز الواردة في هذين الدستورين فيجب

اعتبارها بمفهوم 31. 13 و 91. 13 على التوالي من اجل $A(t) = A$ ثابت ومن اجل $A(t)$ متغير.

بصفة خاصة اذا لم يتعلق المؤثر $A(t) = A$ بـ t وكان التابع

$$b(t) \text{ من الشكل الخاص: } b(t) = \sum_{h=1}^m P_h(t) e^{Q_h t} b_h,$$

حيث $P_h(t)$ كثير حدود و Q_h مؤثر ثابت يتبادل مع المؤثر A و b_h اشعة مثبتة من الفضاء B، فإن التكامل 28. 13 (2) يمكن حسابه صراحة. في الحالة الراهنة، يمكننا توقع بنية النتيجة بتقدير معاملات غير معينة؛ ولذا نستطيع البحث عن الحل بطريقة المعاملات غير المعينة.

48. 13. نعتبر حالة الفضاء ذي n بعداً $B = R_n$. يعطي هنا المؤثر الحال $\Omega_{i_0}^t$ بالمصفوفة الورونسكية 27. 13:

$$\Omega_{i_0}^t = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

نبحث عن الحل من الشكل 18. 13 (2)؛ يمكن ان نكتب في الحالة المتبعة:

$$v_{1j}(t) = \sum_{h=1}^n f_{jh}(t) C_h(t),$$

حيث $C_1(t), \dots, C_n(t)$ توابع يجب تعيينها. تأخذ المعادلة

$$\sum_{h=1}^n f_{jh}(t) C_h'(t) = b_j(t). \quad (5) \text{ 18. 13 شكل الجملة:}$$

بجل هذه الجملة بالنسبة لـ $C_h(t)$ ثم بالمكاملة من t_0 الى t فإننا

نحصل على الكميات المطلوبة $C_k(t)$.

58. 13. نعتبر المعادلة من الرتبة n :

$$y^{(n)}(t) = a_n(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y(t) + b(t).$$

يأخذ المؤثر الحال للجلمة المكافئة

$$u_1'(t) = u_2(t),$$

$$u_2'(t) = u_3(t),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_n'(t) = a_1(t) u_1(t) + \dots + a_n(t) u_n(t),$$

حيث $u_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, $u_2(t) = y'(t)$, \dots , $u_1(t) = y(t)$,

يأخذ الشكل:

$$\Omega_{t_0}^t = \begin{vmatrix} w_1(t) & \dots & w_n(t) \\ w_1'(t) & \dots & w_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_1^{(n-1)}(t) & \dots & w_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

حيث $w_1(t), \dots, w_n(t)$ حلول موافقة لمصفوفة غير منحلة من المعطيات الابتدائية. نبحث عن الحل على الشكل 18. 13 (2)، أي ان لدينا (فيما

$$v(t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) C_k(t). \quad \text{يخص السطر الاول):}$$

تأخذ المعادلات 18. 13 (5) في الحالة الراهنة الشكل التالي:

$$\sum_{k=1}^n w_k(t) C_k'(t) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n w_k'(t) C_k'(t) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{k=1}^n w_k^{(n-1)}(t) C_k'(t) = b(t).$$

يجل هذه المعادلات بالنسبة لـ $C_k(t)$ وبالمكاملة من t_0 الى t نحصل على التوابع $C_k(t)$ ، ومنه يأتي الحل المطلوب $v(t)$.

تمارين

1. لدينا حلان مختلفان $y = 0$ و $y = x^3$ لنفس المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0. \quad \text{هل هناك تناقض بين}$$

ذلك والنظرية الوجدانية 53.13؟

2. ننزلق نقطة ذات وزن بدون احتكاك على طول منحني. عين هذا

المنحني لكي تكون ازاحة مسقط هذه النقطة على المستقيم الافقي منتظمة (السؤال أ). ب) نفس السؤال عندما نريد أن تكون تلك الازاحة منتظمة على المستقيم العمودي.

3. نعرف حلا خاصا $u_1(t)$ لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية:

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0.$$

كيف نجد حلا ثانيا مستقلا خطيا عن الاول؟

4. طبقا لـ 71.13 فإن كل معادلة خطية من الرتبة n ذات معاملات

ثابتة تكافئ جملة من الرتبة الاولى مصفوفتها تقبل كثير حدود اصغريا درجته n . اثبت ان كل جملة n معادلة من الرتبة الاولى تتمتع بهذه الخاصية تكافئ معادلة من الرتبة n .

5. لتكن $u'(t) = A(t)u(t)$ معادلة شعاعية $(u(t) \in \mathbb{R}_n)$ و

$A(t)$ مؤثرا دوريا دورته T (أي $A(t+T) = A(t)$). اثبت ان

$$\Omega_0^{t+T} = C\Omega_0^t, \quad \text{حيث } C \text{ مؤثر ثابت.}$$

6. لتكن $u_1(t), \dots, u_n(t)$ تابعا مستقلا خطيا قيمها في الفضاء

\mathbb{R}_N قابلة للإشتقاق من اجل كل $t \in [a, b]$, حيث $n \leq N$. اثبت

وجود معادلة $u'(t) = A(t)u(t)$ بمؤثر مستمر $A(t)$ في \mathbb{R}_N تقبل

هذه التوابع الشعاعية كحلول لها.

7. لتكن $y_1(t), \dots, y_n(t)$ تابعا سلمياً مستقلة خطيا وتقبل الاشتقاق

n مرة. هل يمكن ان يكون معينها الورونسكي مطابقا للصفر؟

8 . لتكن $y_1(t), \dots, y_n(t)$ تابعا سلميا مستقلة خطيا وقابلة للإشتقاق n مرة، معينها الورونسكي غير منعدم. انشيء معادلة من الرتبة n تقبل $y_1(t), \dots, y_n(t)$ كحلولا لها.

9 . إذا كان للتابعين $A(t)$ و $b(t)$ مشتقات مستمرة بما في ذلك المشتق من الرتبة m ، فإن للمعادلة الخطية.

$$u'(t) = A(t) u(t) + b(t)$$

مشتقات مستمرة بما فيها المشتق من الرتبة $(m+1)$.

10 . إذا كان $y(0) = 0$ وتحققت المتراجحة $y'(t) - ky(t) \leq \varphi(t)$ من اجل $0 \leq t \leq T$ ، فإن المتراجحة:

$$y(t) \leq \int_0^t e^{-k(t-s)} \varphi(s) ds$$

محقة ايضا من اجل $0 \leq t \leq T$.

11 . (تمة) إذا تحققت المتراجحة:

$$w(t) \leq \varphi(t) + k \int_0^t w(s) ds$$

من اجل $0 \leq t \leq T$ فإن الأمر كذلك فيما يخص المتراجحة:

$$w(t) \leq \varphi(t) + k \int_0^t \varphi(s) e^{k(t-s)} ds.$$

12 . (تمة) نقول عن تابع $y(t) \in X$ على $[0, T]$ انه ε - حل

تقريبا للمعادلة: $u'(t) = f(t, u)$ إذا كان:

$$\|y'(t) - f(t, y(t))\| \leq \varepsilon$$

على $[0, T]$. اثبت ان لدينا المتراجحة التالية من اجل كل حل $u(t)$ وكل ε - حل تقريبا:

$$\|u(t) - y(t)\| \leq \|u(0) + v(0)\| e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k} [e^{kt} - 1],$$

حيث k هو الثابت الوارد في شرط ليبشيتز للتابع $f(t, u)$.

13 . (تمة) نعتبر المعادلة

$$(1) \quad u'(t) = A(t) u(t), \quad u(0) = u_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

بمؤثر مستمر معطى $A(t)$. ليكن :

$$\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}.$$

نعرف تابعا شعاعيا مستمرا $y_{\Pi}(t)$ كما يلي :

$$y_{\Pi}(0) = y_0;$$

$$y_{\Pi}(t_{k+1}) = y_{\Pi}(t_k) + A(t_k) y_{\Pi}(t_k) \Delta t_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1);$$

إن $y_{\Pi}(t)$ من الدرجة الاولى من اجل $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، انشيء تجزئة Π بحيث يصبح التابع $y_{\Pi}(t)$ ε -حلا تقريبا للمعادلة (1).

14. (تتمة) اثبت ان هناك حلا للمعادلة (1) (التمرين 13) معطى بالعبارة

$$u(T) = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} y_{\Pi}(T) = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \left\{ \prod_{k=n-1}^0 (E + A(t_k) \Delta t_k) \right\} u_0$$

(نلاحظ ان ترتيب العوال له اهميته!).

15. عرف، ضمن فرض التمرين 13، تابعا شعاعيا مستمرا $z_{\Pi}(t)$ وفق القاعدة:

$$z_{\Pi}(0) = y_0;$$

$$z_{\Pi}(t_{k+1}) = \left\{ \prod_{j=k}^0 e^{A(t_j) \Delta t_j} \right\} y_0, \quad (k=0, 1, \dots, n-1);$$

من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، انشيء تجزئة Π بحيث يصبح التابع $z_{\Pi}(t)$ حلا تقريبا للمعادلة (1).

16. اثبت ان هناك حلا للمعادلة (1) (التمرين 13) معطى بالعبارة:

$$u(T) = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} z_{\Pi}(T) = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \left\{ \prod_{j=n-1}^0 e^{A(t_j) \Delta t_j} \right\} u_0$$

(نلاحظ ان ترتيب العوامل له اهميته!).

نبذة تاريخية

ظهرت بعض المعادلات التفاضلية في الرياضيات منذ اكتشاف الحساب التفاضلي والتكاملي، اي منذ اعمال نيوتن وليبنيتز، كامل لينيتز سنة 1693 المعادلة الخطية المتجانسة من الرتبة الاولى. ووجد اولر (1739) حل المعادلة الخطية، متجانسة أو غير متجانسة، من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة. اما طريقة تغير الثابت فقد شيدها لاغرانج (1775)؛ مع العلم ان أولر كان قد حل العديد من المساي باستخدام هذه الطريقة وذلك منذ 1739.

حققت نظرية المعادلات التفاضلية خلال القرن 18 تقدما حاسما في الميكانيكا العادية وميكانيكا الفضاء ونظرية المد والجزر في البحار وكذا الارصاد الجوي وميادين اخرى في الفيزياء.

كانت النجاحات التي سجلتها نظرية المعادلات التفاضلية قد كيفت النتيجة الفلسفية في طابعها الشمولي، وهو ما يسمى «مبدأ الحتمية الميكانيكية» الذي تعبر عليه الكلمة التوجيهية التي تنصدر هذا الفصل. لعبت هذه النتيجة، وقتئذ، ابرازها الانتصار النهائي للعقل لعبت دورا كبيرا في تحرير العلم من التأثيرات اللاهوتية والذهنيات المتجمدة. ورغم ذلك، اثبتت نجاحات الفيزياء في القرن 20 ضيق الحتمية الميكانيكية التي تخلت في الميادين الفيزيائية المتقدمة عن مكانها لتحتله الحتمية الاحصائية، هذا مع احتفاظ الحتمية الميكانيكية بقيمتها في المسائل الميكانيكية.

ادخل ورونسكي، الرياضي والفيلسوف، معينة الخاص بالمشتقات سنة

1812.

طرحت المسألة العامة للوجود والوحدانية لحل معادلة تفاضلية في اعمال القرن 19 وجاء بأول برهان لوجود الحل كوشي (1844)؛ ثم اختصره لبيشيتز اختصارا كبيرا وصاغ الشرط الذي يحمل اسمه. قدم بيكار (1890) طريقة التقريبات المتوالية، وقام باناخ سنة 1922 بوضع هذه الطريقة في قالب مجرد من اجل فضاء متري باستخدام صريح لمؤثر مقلص.

النشور المتعامدة

لا تمثل نظرية فورييه نتيجة من اجل نتائج التحليل الحديث فحسب بل تمثل ايضا اداة ضرورية لدراسة اغلب المسائل الرئيسية في الفيزياء الحديثة.

و. تومسن و ب. ج. ثايت « فلسفة طبيعة (1867) »

W. Thomson, P.G. Tait

§ 14. 1. النشور المتعامدة في فضاء هيلبرتي

11. 14. طرح المسألة. انشغلنا في § 5. 12 بالتقريبات المنتظمة في الفضاء $C(Q)$ المؤلف من التوابع المستمرة، اي التقريبات بالنسبة للنظيم:

$$(1) \quad \|f\|_C = \max |f(x)|.$$

يهتم العديد من المسائل في التحليل باعتبار التقريبات بمفوم المتوسط التكاملي، أي بالنسبة للنظيم:

$$(2) \quad \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_Q |f(x)|^p dx},$$

يمثل Q في هذا الفصل مجالا مغلقا من المحور الحقيقي.

ما هي الشروط التي ينبغي توفرها في جملة (خطية) معطاة $B(Q)$

تتألف من توابع $\varphi(x)$ لكي نستطيع، من اجل كل تابع $f(x)$ (مستمر أو على الاقل مستمر بتقطع، وهو ما يضمن وجود التكاملات التي نحتاج اليها) ان نشير لمتتالية $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ توابع من $B(Q)$ بحيث:

$$(4) \quad \|f - Q_n\|_2 = \sqrt{\int_Q |f(x) - \varphi_n(x)|^2 dx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

إذا تقاربت متتالية $f(x)$ بانتظام نحو $Q_n(x)$ فإن العلاقة (4)

قائمة بطبيعة الحال. لكن التقارب المنتظم لا تستوجبه العلاقة (4) بل ان هذه العلاقة لا تستلزم حتى التقارب البسيط. يمكننا إذن القول بأن مسألة التقاربات بمفهوم المتوسط التربيعي « ايسر » من مسألة التقريبات المنتظمة. زيادة على ذلك فإن انشاء تقريبات من النمط الاول يمكن وضعه في شكل هندسي واضح وهذا لكون فضاء التوابع الموافق لذلك، بالنظم (3)، فضاء هيلبرتي حيث نستطيع قياس اطوال الاشعة كما هو الحال في فضاء نظمي ونستطيع بجانب ذلك استخدام خاصية التعامد.

21. 14. التقريبات في فضاء هيلبرتي. ليكن H فضاء هيلبرتي حقيقيا أو عقديا. وليكن $B \subset H$ الفضاء الجزئي، الذي بعده n ، المؤلف من جملة متعامدة ومتجانسة e_1, \dots, e_n (بحيث $(e_j, e_k) = 1$ عندما $j = k$ و $(e_j, e_k) = 0$ عندما $j \neq k$). نضع المسألة التالية: من اجل شعاع $f \in H$ معطى، نبحث عن شعاع $y = \sum_{k=1}^n c_k e_k \in B$ بحيث يكون المقدار: $\|f - y\|$ اصغر مقدار ممكن. نفرض في حل هذه المسألة ان الفضاء H عقدي؛ إن كان حقيقيا فما علينا إلا اجراء بعض الاختصارات في الرموز. من اجل كل

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned} \|f - x\|^2 &= (f - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, f - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k) = \\ &= (f, f) - \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{(f, e_k)} - \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k (f, e_k) + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 = \\ &= (f, f) + \sum_{k=1}^n [|(f, e_k)|^2 - \xi_k \overline{(f, e_k)} - \bar{\xi}_k (f, e_k) + |\xi_k|^2] - \\ &= \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2 = \\ &= (f, f) + \sum_{k=1}^n [(f, e_k) - \xi_k] \overline{[(f, e_k) - \xi_k]} - \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2 = \\ (1) \quad &= (f, f) + \sum_{k=1}^n |(f, e_k) - \xi_k|^2 - \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2. \end{aligned}$$

من الواضح ان العبارة المحصل عليها اصغرية إن كان $\xi_k = (f, e_k)$ يسمى الشعاع $(k = 1, \dots, n)$. $y = \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k$ مسقط الشعاع

f على الفضاء الجزئي B ، حيث يمثل الشعاع $f - y = h$ لعمود المسقط من طرف الشعاع f على الفضاء الجزئي B ؛ تنطبق هذه التعاريف في الحالة الحقيقية مع المفاهيم الهندسية الموافقة لها (الرسم 1.14). نرى من خلال (1) ان مربع طول الشعاع h هو:

$$\|h\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2.$$

ومنه تأتي بصفة خاصة متراجحة بيسل (Bessel):

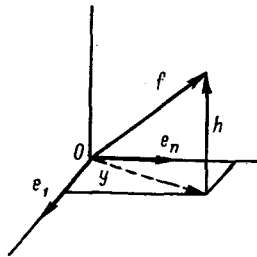
$$(2) \quad \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|^2$$

القائمة من اجل كل شعاع $f \in H$ وكل جملة متعامدة ومتجانسة e_1, \dots, e_n .

نرى في الختام ان احسن تقريب « هيلبرتي » للشعاع f باشعة الفضاء الجزئي B ينجز عندما نختار كشعاع مقارب y مسقط الشعاع f على الفضاء الجزئي B .

31.14. نعتبر الآن جملة متعامدة ومتجانسة غير منتهية $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$. يمكن القيام بالإنشاء الوارد اعلاه من اجل كل جملة منتهية e_1, \dots, e_n والحصول على احسن تقريب هيلبرتي الموافق لذلك $y_n = \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k$. نشير الى ان المعاملات (f, e_k) المتعلقة باحسن تقريب لا تتعلق بالرقم k . اما الانحراف h_n فيساوي، كما رأينا:

$$(1) \quad \|h_n\| = \sqrt{(f, f) - \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2}.$$



الرسم 1.14

السؤال المطروح هو: هل يمكن جعل الكمية $\|h_n\|$ صغيرة بالقدر الذي نريد وهذا باختيار n كبير بكفاية؟ لا يمكن أن يتحقق ذلك في الحالة العامة: مثلاً، إذ كانت جملة e_1, e_2, \dots «غير تامة» أي إذا وجد شعاع f غير منعدم ومتعامد على كل الأشعة e_1, e_2, \dots فإن كل الأعداد (f, e_k) منعدمة وكل الأعداد $\|h_n\|$ تساوي $\|f\|$.

14. 41. أ. على الرغم من ذلك فإننا نستطيع ضمن بعض الشروط القول بأن الأعداد $\|h_n\|$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى ∞ . يتحقق ذلك إذا علمنا، انطلاقاً من بعض الاعتبارات الإضافية (مثلاً، من نظريات من فمط ستون Stone (25. 12) في بعض الفضاءات التابعة) أنه من الممكن اختيار من بين العبارات الخطية للأشعة e_1, e_2, \dots متتالية متقاربة (بالنسبة للنظيم الهيلبرتي) نحو الشعاع f . ذلك أنه إذا كانت لدينا المتراجحة $\|f - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k\| \leq \varepsilon$ من أجل عبارة خطية $\sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ فإن لدينا بالضرورة فيما يخص أحسن تقريب هيلبرتي $(f, e_k) e_k$:

$$(1) \quad \|h_n\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |(f, e_k)|^2} = \|f - \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k\| \leq \varepsilon.$$

ب. ضمن الفرض أ، نحصل على المساواة التالية بالانتقال إلى النهاية $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(2) \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k.$$

تسمى السلسلة الواردة في الطرف الأخير سلسلة فوريي للشعاع f وفق الجملة المتعامدة والمتجانسة e_1, e_2, \dots . تسمى الأعداد (f, e_k) معاملات فوريي للشعاع f وفق الجملة e_k . هذه التسميات صالحة بغض النظر عن طبيعة السلسلة؛ إن كانت سلسلة فوريي متباعدة فإننا نعتبرها الآن بصفة شكلية.

ج. في حالة تقارب السلسلة (2) نحو الشعاع f ، نجد بالانتقال الى النهاية في (1) ان:

$$(3) \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2.$$

تمثل هذه المساواة نتيجة مماثلة لنظرية فيثاغورس في حالة البعد غير المنتهي، وتسمى مساواة بارسفال (Parseval). إذا عجزنا عن اثبات تقارب سلسلة فوريي نحو الشعاع f ، فإن لدينا دوماً المتراجحة:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|^2$$

التي تستخلص، بالانتقال الى النهاية في متراجحة بيسل 21.14 (2) وتسمى هي الاخرى متراجحة بيسل.

د. نلاحظ اخيراً انه إذا تقاربت سلسلة فوريي لشعاع f نحو f

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k,$$

فإن الامر كذلك بعد كل تبديل للحدود يضع الحد من الرتبة في الرتبة k ($k = 1, 2, \dots$):

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_{n_k}) e_{n_k}.$$

ذلك ان لدينا حسب (1):

$$\|f - \sum_{k=1}^N (f, e_{n_k}) e_{n_k}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N |(f, e_{n_k})|^2.$$

تؤول الكمية الاخيرة نحو الصفر عندما يؤول N الى ∞ وذلك حسب (3) وشرعية تغيير ترتيب الحدود في سلسلة متقاربة حدودها موجبة (63.6).

51.14. من الضروري ان تظهر سلاسل فوريي في مسائل التقريبات لأن لدينا الخاصية التالية:

توطئة. نفرض أن لدينا، من اجل شعاع $f \in H$ وجملة متعامدة ومتجانسة $\{e_k\}$ في H ، نشرأ:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

اي ان

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n_p} c_k e_k \right\| = 0$$

على الاقل من اجل متتالية $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$ ، عندئذ يكون كل معامل c_m مساوياً لمعامل فوريي (f, e_m) ، $(m = 1, 2, \dots)$ ، وتكون السلسلة (1) متقاربة بالنظيم بالمفهوم المعتاد .

البرهان . بضرب (1) سلمياً في e_m وباستعمال استمرار الجداء السلمي (34.12 - ب) وكون الجملة $\{e_k\}$ متعامدة ومتجانسة نحصل على :

$$(f, e_m) = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_1^{n_p} c_k e_k, e_m \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_1^{n_p} c_k e_k, e_m \right) = c_m,$$

وهو المطلوب .

$$f = \sum_1^{\infty} a_k e_k, \quad g = \sum_1^{\infty} b_k e_k \quad \text{61.14 . توطئة . ليكن :}$$

نشرين (بالمفهوم الوارد في 51.14) ، جملة متعامدة ومتجانسة ؛ إن السلسلة $\sum_1^{\infty} a_k b_k$ متقاربة مطلقاً ولدينا :

$$(1) \quad \sum_1^{\infty} a_k \bar{b}_k = (f, g).$$

البرهان . يأتي التقارب المطلق للسلسلة في الطرف الايسر من (1) من المتراجحة :

$$|a_k b_k| \leq \frac{1}{2} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

وهذا بفضل 41.14 (4) . ثم إذا كان

$$f = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_1^{m_p} a_k e_k, \quad g = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_1^{n_p} b_k e_k$$

بالنظيم في الفضاء H وكان $l_p = \min(m_p, n_p)$ فإن لدينا بفضل استمرار الجداء السلمي :

$$\begin{aligned} (f, g) &= \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_1^{m_p} a_k e_k, \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_1^{n_p} b_k e_k \right) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_1^{l_p} a_k \bar{b}_k = \sum_1^{\infty} a_k \bar{b}_k. \end{aligned}$$

71.14 . نكتب ، قصد استعمالها مستقبلاً ، سلسلة فوريي ومتراجحة

بارسفال في حالة جملة متعامدة وغير متجانسة g_1, g_2, \dots . إذا كان الشعاع g_n غير منعدم من اجل كل n . فإن الجملة $e_n = g_n / \|g_n\|$ متعامدة ومتجانسة. يمكن كتابة سلسلة فورييه لشعاع f وفق الجملة e_n كما يلي.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, \frac{g_k}{\|g_k\|} \right) \frac{g_k}{\|g_k\|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|^2} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k, \quad (1)$$

حيث

$$\alpha_k = \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|^2}. \quad (2)$$

تسمى السلسلة الواردة في الطرف الاخير من (1) سلسلة فورييه الشعاع f وفق الجملة g_n ، وتمثل الاعداد α_k معاملات فورييه الشعاع f وفق الجملة g_n . إذا تقاربت السلسلة (1) نحو f فإن لدينا:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{g_k}{\|g_k\|} \right) \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, g_k)|^2}{\|g_k\|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|^2 \alpha_k^2,$$

وهو ما يمثل مساواة بارسفال للجملة g_n . وبذلك تصبح المساواة (1) 61.14:

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \bar{\beta}_n \|g_n\|^2 \quad (3)$$

وهذا بافتراض ان:

$$f = \sum_1^{\infty} \alpha_n g_n, \quad g = \sum_1^{\infty} \beta_n g_n.$$

§ 2. 14. سلاسل فورييه التقليدي.

12. 14. نعتبر في الفضاء الهيلبرتي الحقيقي $H_R[-\pi, \pi]$ (12. 84 -

(د المؤلف من التوابع $f(t)$ المستمرة بتقطع على المجال $[-\pi, \pi]$ ، أو، وهذا يعني الامر نفسه، على الدائرة

$$Q = \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t\}.$$

نعتبر الجملة المتعامدة غير المنتهية.

$$(1) \quad 1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

يتضح تعامد هذه الجملة مباشرة بحساب تكاملات التوابع:

$$\sin kt \cdot \sin mt, \quad \cos kt \cdot \sin mt, \quad \cos kt \cdot \cos mt.$$

· $[-\pi, \pi]$.

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dt = 2\pi \quad \text{لجعل هذه الجملة، متجانسة نلاحظ أن}$$

ومن 55.9 - ج يأتي:

$$\|\cos kt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \pi,$$

$$\|\sin kt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt = \pi.$$

وبالتالي تكتب سلسلة فوريي 71.14 (1) عندما يكون لدينا تابع

$f(t) \in H_R[-\pi, \pi]$ على الشكل:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \cos t \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos \tau d\tau +$$

$$+ \sin t \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin \tau d\tau + \dots =$$

$$(2) \quad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

حيث:

$$(3) \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

تسمى الاعداد a_n و b_n معاملات فوريي التابع $f(t)$ وفق الجملة

(1) المؤلفات من توابع مثلثية. سنناقش مسألة تقارب سلسلة فوريي (2) بعد قليل (42.14).

22.14. ننتقل الآن الى سلسلة مثلثية لفوريي في الشكل العقدي. نعتبر الفضاء الهيلبرتي العقدي $H_C[-\pi, \pi]$ المؤلف من التوابع العقدية المستمرة بتقطع على المجال $-\pi \leq t \leq \pi$ (84.12 - ر). لدينا هنا جملة متعامدة غير منتهية مؤلفة من التوابع:

$$(1) \quad e^{int} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

يأتي تعامد هذه الجملة من المساواة البديهية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n \neq m).$$

: بحسب نظيم التابع

$$\|e^{int}\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|^2 dt} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt} = \sqrt{2\pi}.$$

فإن سلسلة فوريي $f(t) \in H_C[-\pi, \pi]$ من اجل تابع معطى

(1) 71.14 تأخذ شكل سلسلة ثنائية الجانب (84.6):

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

حيث

$$(3) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-in\tau} d\tau$$

تمثل معاملات فوريي التابع $f(t)$ وفق الجملة (1).

32.14. باستخدام دستور اولر:

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

يمكننا وضع السلسلة (2) 22.14 على الشكل (2) 12.14 (2) كتبنا اعلاه

السلسلة (2) 12.14 من اجل التوابع الحقيقية فقط).

نضع:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2},$$

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = (c_n + c_{-n}) \cos nt + i(c_n - c_{-n}) \sin nt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau \cdot \cos nt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau \cdot \sin nt =$$

$$= a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

نلاحظ، من اجل كل n ، ان المجموع الجزئي للسلطة 12. 14 (2) والمجموع الجزئي المتناظر لـ 22. 14 (2) متطابقان. وبالتالي فإن تقارب السلطة 12. 14 (2) يكافئ قابلية الجمع المتناظر للسلطة 22. 14 (2). نشير، كما فعلنا في 94. 6، ان قابلية الجمع المتناظر للسلطة 22. 14 (2) يمكن ان تتحقق من اجل كل $t \in R_1$ بدون ان تكون السلطة متقاربة (مفهوم وجود $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{-m}^n$).

42. 14. نظرية. إن سلطة فوريي 22. 14 (2) لكل تابع (عقدي) مستمر بتقطع على المتراص $Q = [-\pi, \pi] = \{x^2 + y^2 = 1\}$ متقاربة نحو $f(t)$ بنظم الفضاء $H_C(Q)$ مهما كان ترتيب حدودها.

البرهان. بمراعاة النتيجة 41. 14 - أ يكفي اثبات وجود متتالية $T_n(t)$ من كثيرات الحدود المثلثية المتقاربة نحو $f(t)$ بنظم الفضاء $H_C(Q)$

نعتبر P الحدود المثلثية:

$$T_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau; t) f(\tau) d\tau,$$

حيث $D_n(\tau; t)$ متتالية ذات الشكل دلنا الواردة في 75. 12 - أ. إن كثيرات الحدود $T_n(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على كل مجموعة مغلقة $E \subset Q$ من نقاط استمرار التابع $f(t)$ وهذا حسب النظرية 12. 75 - ج. تبقى كثيرات الحدود $T_n(t)$ محدودة بالطويلة على كل Q بالعدد $M = \sup |f(t)|$. من اجل $\varepsilon > 0$ معطى فإن المجموعة المنتهية من نقاط تقطع التابع $f(t)$ يمكن تغطيتها بمجموعة مفتوحة U هي اتحاد لعدد منته من المجالات مجموع اطوالها اصغر من ε . إن التابع

$f(t)$ مستمر على المجموعة المغلقة $Q - U$. نبحث عن عدد n بحيث

يكون $|f(t) - T_n(t)| < \varepsilon$ على $Q - U$. عندئذ

$$\begin{aligned} \|f(t) - T_n(t)\|^2 &= \int_Q |f(t) - T_n(t)|^2 dt = \\ &= \int_U |f(t) - T_n(t)|^2 dt + \int_{Q-U} |f(t) - T_n(t)|^2 dt \leq \\ &\leq 4M^2\varepsilon^2 + 4\pi^2\varepsilon^2 = 4\varepsilon^2(M^2 + \pi^2), \end{aligned}$$

ومنه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) = f(t)$$

وهذا في $H_c(Q)$ ، وهو المطلوب.

يتبين مما قلناه اعلاه ان لدينا النتيجة الماثلة للسابقة من اجل كل تابع

حقيقي مستمر بتقطع $f(t)$ باعتبار سلسلة فورييه 12.14 (2).

52.14. نحصل من تمّ على مساواة بارسفال من اجل كل تابع $f(t)$

مستمر بتقطع: في الحالة الحقيقية،

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_1^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

وهذا حسب الدستورين 71.14 و 12.14؛ اما في الحالة العقدية،

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

وهذا حسب الدستورين 71.14 و 22.14.

نرى، إذا كان $f(t)$ و $g(t)$ تابعين مستمرين بتقطع، ان

لدينا في الحالة الحقيقية، حسب 71.14 (3)، التي يكون فيها:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

$$g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt),$$

المساواة:

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt = \pi \frac{a_0 c_0}{2} + \pi \sum_1^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n),$$

اما في الحالة العقدية التي يكون فيها:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{int},$$

ف لدينا:

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

62. 14 . نستنتج من النظرية 42. 14 والعلاقتين 52. 14 (1) - (2) بصفة خاصة النتائج التالية:

أ. نتيجة. إن معاملات فوريي a_n و b_n لتابع مستمر بتقطع $f(t)$ تؤول الى 0 من اجل $n \rightarrow \infty$ ، وتؤول المعاملات c_n الى 0 من اجل $n \rightarrow \pm \infty$.

ب. نتيجة. إذا كانت كل معاملات فوريي 12. 14 (3) (أو 22. 14 (3)) لتابع مستمر بتقطع $f(t)$ منعدمة، فإن $f(t)$ منعدم ايها كان باستثناء ممكن لعدد منته من النقاط (9. 61 - ر).

ج. نتيجة. إذا كان تابعان مستمران بتقطع $f(t)$ و $g(t)$ لهما معاملات فوريي 12. 14 (3) أو 22. 14 (3) متساوية على التوالي فإنها متطبقان ايها كان باستثناء ممكن لعدد منته من النقاط.

د. نتيجة. إن الجملة المتعامدة 12. 14 (1) المؤلفه من التوابع المثلثية جملة تامة: كل تابع مستمر بتقطع $f(t)$ متعامد على كل توابع الجملة 12. 14 (1) يمثل صفر الفضاء $H_R(Q)$ ، أي انه منعدم ايها كان باستثناء ممكن لعدد منته من النقاط. الامر كذلك فيما يخص جملة التوابع e^{int} 12. 14 (1) في الفضاء $H_C(Q)$.

72. 14 أ. توطئة. إذا تقاربت سلسلة مثلثية $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ نحو تابع $s(t)$ بانتظام على $[-\pi, \pi]$ بمفهوم ان من اجل متتاليتين $m_p \rightarrow \infty$ و $n_p \rightarrow \infty$ لدينا:

$$s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{-m_p}^{n_p} c_k e^{ikt}$$

بانظام على $[-\pi, \pi]$ ، فإن الاعداد c_k تتطابق مع معاملات فوريي للتابع $s(t)$.

هذه النتيجة بديهية لأن التابع $s(t)$ مستمر والتقارب المنتظم يستلزم التقارب بنظم $H_C(Q)$ ، وهذا ما يسمح بتطبيق 51.14 .

ب. نتيجة . إذا كانت c_n ($n = 0, \pm 1, \dots$) معاملات فوريي لتابع مستمر بتقطع $f(t)$ وكانت السلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ متقاربة بانظام نحو تابع $s(t)$ بالمفهوم الوارد في أ ، فإن $f(t) \equiv s(t)$ ايها كان ، باستثناء يمكن لعدد منته من النقاط .

ذلك ان التابع $s(t)$ مستمر والاعداد c_n هي ، بفضل أ ، معاملات فوريي ؛ ثم إن هذه الاعداد نفسها هي ، فرضا ، معاملات فوريي التابع $f(t)$. يؤدي تطبيق النتيجة 62.14 - ج الى النتيجة المطلوبة .

§ 3.14 . تقارب سلسلة فوريي عند نقطة وعلى مجموعة .
 13.14 . تقارب سلسلة فوريي عند نقطة . رأينا في 42.14 ان سلسلة فوريي تسمح بالحصول على تقريب لا محدود لتابع مستمر بتقطع معطي $f(t)$ بمفهوم المتوسط التربيعي . نريد ان نعرف إن كانت سلسلة فوريي تسمح بالحصول على تقريب لا محدود لقيمة التابع $f(t)$ عند نقطة معطاة $t = t_0$ ؛ إن كانت سلسلة فوريي متقاربة عند $t = t_0$ نحو العدد $f(t_0)$ بالمفهوم المعتاد .

نمبر من اجل ذلك سلسلة فوريي في شكلها العقدي 212.14 (2) .
 ليكن :

$$s_{m, n} = \sum_{k=-m}^n c_k e^{ikt}$$

مجموعا جزئيا لسلسلة فوريي لتابع $f(t)$ ، من اجل عددين $m > 0$ ،

$$s_{m, n}(t) = \sum_{-m}^n c_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-m}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \cdot e^{ikt} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{-m}^n e^{ik(t-\tau)} d\tau .$$

نجمع المتوالية الهندسية فنحصل على :

$$\sum_{-m}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{-im\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(m+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(m+\frac{1}{2})\theta}}{2i \sin \frac{\theta}{2}},$$

إذن :

$$(1) \quad \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})(t-\tau)} - e^{-i(m+\frac{1}{2})(t-\tau)}}{\sin \frac{t-\tau}{2}} d\tau = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})h} - e^{-i(m+\frac{1}{2})h}}{\sin \frac{h}{2}} dh.$$

إذا وضعنا $f(t) \equiv 1$ فإن لدينا $s_{m,n}(t) \equiv f(t)$ من اجل $n > 0$ و $m > 0$. يعطى الدستور (1) :

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})h} - e^{-i(m+\frac{1}{2})h}}{\sin \frac{h}{2}} dh = 1.$$

يأخذ الآن الفرق $s_{m,n}(t) - f(t)$ الشكل :

$$(2) \quad s_{m,n}(t) - f(t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t+h) - f(t)\} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})h} - e^{-i(m+\frac{1}{2})h}}{\sin \frac{h}{2}} dh.$$

ما هي الشروط التي تجعل $s_{m,n}(t)$ تؤول الى $f(t)$ أي الشروط التي تجعل التكامل (2) يؤول الى الصفر .

23. 14 . توطئة . إذا كان $\varphi(h)$ تابعا قيمة عقدية معرفا في المجال $a < x \leq b$ ومحدودا ومستمرًا بتقطع على كل مجال $[a + \delta, b]$ ، $\delta > 0$ ، وقابلا للمكاملة مطلقا بالمفهوم الموسع على $[a, b]$ ، فإن

$$\int_a^b \varphi(h) \sin vh \, dh, \quad \int_a^b \varphi(h) \cos vh \, dh, \quad \int_a^b \varphi(h) e^{ivh} \, dh$$

التكاملات :

تؤول الى الصفر عندما $v \rightarrow \pm \infty$

البرهان . بمراعاة الدستورين :

$$v\bar{h} = \frac{1}{2} (e^{ivh} + e^{-ivh}) \quad \text{و} \quad v\bar{h} = \frac{1}{2i} (e^{ivh} - e^{-ivh})$$

يكفي اعتبار التكامل الاخير . نعالج في البداية الحالة التي يكون فيها التابع $\varphi(h)$ مستمرا على المجال $[a, b]$. عندما نثبت v فليس هناك على هذا المجال سوى عدد منته من نقاط المتوالية الحسابية :

$$a + k \frac{2\pi}{v}, \quad k = 0, 1, 2, \dots ;$$

نرمز لها $h_0 = a < h_1 < \dots < h_m$. نفرض ان التابع $g(h)$ يساوي $\varphi(h_0)$ في المجال $[h_0, h_1]$ و $\varphi(h_1)$ في $[h_1, h_2]$ ، الخ .، اخيرا $\varphi(h_m)$ في المجال $[h_m, b]$. من الواضح ان :

$$(1) \quad |g(h) - \varphi(h)| \leq \omega_\varphi \left(\frac{2\pi}{v} \right)$$

اينا كان على $[a, b]$ ، حيث يرمز $\omega_\varphi(\delta)$ لتذبذب التابع $\varphi(x)$ على $[a, b]$ (71.5 - ج) . بما ان المجال $[h_j, h_{j+1}]$ دورة للتابع

$$e^{ivh} \quad \text{فان} \quad \int_{h_j}^{h_{j+1}} g(h) e^{ivh} dh = \varphi(h_j) \int_{h_j}^{h_{j+1}} e^{ivh} dh = 0 ;$$

اذن :

$$(2) \quad \left| \int_a^b g(h) e^{ivh} dh \right| = \left| \int_{h_m}^b g(h) e^{ivh} dh \right| \leq M \cdot \frac{2\pi}{v},$$

حيث $M = \max |\varphi(h)|$. ينتج من (1) و (2) ان :

$$(3) \quad \left| \int_a^b \varphi(h) e^{ivh} dh \right| \leq \int_a^b |\varphi(h) - g(h)| dh + \left| \int_a^b g(h) e^{ivh} dh \right| \leq \leq \omega_\varphi \left(\frac{2\pi}{v} \right) (b-a) + M \frac{2\pi}{v}.$$

بما ان الكمية $\omega \left(\frac{2\pi}{v} \right)$ تؤول، بفصل استمرار $\varphi(h)$ ، الى الصفر عندما $v \rightarrow \infty$ فان التقدير (3) يثبت التوطئة في الحالة المعتبرة .

ليكن الآن $\varphi(h)$ تابعا كيفيا يحقق فرض التوطئة . من اجل $\varepsilon > 0$ معطى نبحث عن $\delta > 0$ بحيث يكون لدينا :

$$(4) \int_a^{a+\delta} |\varphi(h)| dh < \frac{\varepsilon}{3}.$$

إن التابع $\varphi(h)$ محدود (بالطويلة) بعدد $M = M(\varepsilon)$ وهو مستمر بتقطع في المجال $[a + \delta, b]$. نفكك المجال $[a + \delta, b]$ الى عدد منته $N = N(\varepsilon)$ من المجالات $[a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N]$ بحيث يكون التابع $\varphi(h)$ مستمرا على كل منها. نطبق على كل مجال التقدير (3) فنجد بمراعاة (4):

$$(5) \left| \int_a^b \varphi(h) e^{ivh} dh \right| \leq \int_a^{a+\delta} |\varphi(h)| dh + \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_k}^{b_k} \varphi(h) e^{ivh} dh \right| \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{3} + \omega_\varphi \left(\frac{2\pi}{v} \right) \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) + N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{v} \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{3} + \omega_\varphi \left(\frac{2\pi}{v} \right) (b - a) + N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{v}.$$

يبقى الآن ايجاد، باعتبار ε معلوما، عدد v بحيث تكون الكميتان $\omega_\varphi \left(\frac{2\pi}{v} \right) (b - a)$ و $N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{v}$ اصغر من $\varepsilon/3$. بعد ذلك يتم برهان النظرية.

33. 14. نعود الى المساواة 13. 14 (2). بإمكاننا الآن البرهان على النظرية:

نظرية. إذا كان تابع $f(t)$ مستمرا بتقطع على المجال $[-\pi, \pi]$ وكان التابع $\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ قابلا للمكاملة مطلقا بالنسبة لـ h بالمفهوم الموسع في جوار النقطة $h = 0$ ، فإن المجاميع الجزئية $s_{m, n}(t)$ لسلسلة فورييه التابع $f(t)$ تتقارب عند النقطة $t = t_0$ نحو القيمة $f(t_0)$ عندما $m \rightarrow \infty$ و $n \rightarrow \infty$ (باستقلال m و n عن بعضهما البعض).

البرهان. إذا كان التابع $\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ قابلا للمكاملة بالمفهوم الموسع في جوار النقطة $h = 0$ فإن الامر كذلك فيما يخص التابع:

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{\sin \frac{h}{2}} = \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} \frac{h}{\sin \frac{h}{2}}.$$

وبالتالي يأتي من التوطئة ان التكامل (2):

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{\sin \frac{h}{2}} \{e^{i(n+\frac{1}{2})h} - e^{-i(m+\frac{1}{2})h}\} dh = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right\}$$

يؤول الى الصفر عندما $h \rightarrow \infty$ انتهى برهان النظرية.

43. 14. يسمى شرط قابلية المكاملة المطلقة لـ $\frac{f(t_0+h) - f(t)}{h}$

بالنسبة لـ h لما $h \rightarrow 0$ ، شرط ديني (Dini) لـ $f(t)$. إنه شرط متوفر، مثلا، عندما يكون التابع $f(t)$ محققا لشرط ليبشيتز من الرتبة $\alpha > 0$:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq C |h|^\alpha.$$

بصفة خاصة عندما يقبل التابع $f(t)$ عند النقطة t_0 مشتقا منتهيا

فإن شرط ليبشيتز من الرتبة 1 محقق وبالتالي فإن الاعداد $s_{m,n}(t_0)$ متقاربة نحو $f(t_0)$.

53. 14. التقارب المنتظم لسلسلة فوريي على مجموعة $E \subset Q$. يبين البرهان الوارد اعلاه ان بإمكاننا الحصول، بنفس الطريقة، على التقارب المنتظم لسلسلة فوريي على مجموعة $E \subset Q$.

نقول عن شرط ديني للتابع $f(t)$ انه متوفر بانتظام على مجموعة $E \subset Q$ إذا استطعنا، من اجل كل $\epsilon > 0$ ، إيجاد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\int_{|h| < \delta} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| dh < \epsilon$$

من اجل كل $t \in E$ في آن واحد.

نظرية. إذا كان $f(t)$ محدودا ومستمرًا بتقطع على المجال $Q = [-\pi, \pi]$ (مع العلم ان النقطتين $-\pi$ و π متطابقان كالعادة) وكان شرط ديني للتابع $f(t)$ محققا بانتظام على مجموعة $E \subset Q$ ، فإن سلسلة فوريي التابع $f(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على المجموعة E .

البرهان. كنا كتبنا الفرق $s_{m,n}(t) - f(t)$ على الشكل:

$$s_{m,n}(t) - f(t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+h) - f(t)] \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})h} - e^{-i(m+\frac{1}{2})h}}{\sin \frac{h}{2}} dh.$$

لنثبت ان هذا الفرق يؤول الى الصفر بانتظام على المجموعة E . نضع:

$$\varphi(t, h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{\sin \frac{h}{2}}.$$

من الفرض، نرى من اجل كل $\epsilon > 0$

انه يوجد $\delta_0 > 0$ لا يتعلق بـ t بحيث:

$$\int_{|h| < \delta_0} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{\sin \frac{h}{2}} \right| dh = \int_{|h| < \delta_0} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \frac{h}{\sin \frac{h}{2}} dh \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

إن التابع $\varphi(t, h)$ محدود (بالطويلة) خارج المجال $|h| \leq \delta_0$ بالعدد:

$$M(\epsilon) = \frac{2M}{\sin \frac{\delta_0}{2}},$$

حيث $M = \max |f(t)|$ ؛ ثم إن هذا التقدير لا

يتعلق بـ t . لكن المجموعة Z_ϵ المؤلفة من نقاط تقطع التابع $\varphi(t, h)$

يتعلق بـ t ؛ نحصل على Z_ϵ بسحب مجموعة نقاط تقطع التابع $f(h)$

(باستثناء ممكن لنقطة التقطع $h=0$ التي سبق ان عزلناها) بـ t .

وبالتالي يمكن من اجل كل t تغطية المجموعة Z_ϵ بمسحوب مناسب S_ϵ

لجملة منتهية مثبتة من المجالات مجموع اطوالها اصغر من $\frac{\epsilon}{3M(\epsilon)}$ او

يساويه. نلاحظ ان المجموعة G_ϵ اتحاد عدد مثبت $N(\epsilon)$ من المجالات

يكون فيها التابع $\varphi(t, h)$ مستمرا (لا يمكن ان يزداد عدد هذه

المجالات لأن بعضها متواجد داخل المجال المعزول $|h| \leq \delta_0$) تبقى

خارج S_ϵ .

ليكن:

$$g(h) = \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \quad (|h| \geq \delta_0).$$

نستطيع تقدير التذبذب $\omega_\varphi(\delta)$ للتابع $\varphi(t, h)$ ، بفضل 71.5 - د ،

كما يلي:

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(\delta) &\leq \max |f(t+h) - f(t)| \omega_g(\delta) + \omega_f(\delta) \max |g(h)| \leq \\ &\leq 2M_f \omega_g(\delta) + M_g \omega_f(\delta). \end{aligned}$$

يعطينا الآن التقدير 14. 23 (5) :

$$\begin{aligned}
 4\pi |s_{m, n}(t) - f(t)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(h, t) [e^{i(n+\frac{1}{2})h} - e^{-i(m+\frac{1}{2})h}] dh \right| \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left[2M_f \omega_g \left(\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}} \right) + M_g \omega_f \left(\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}} \right) \right] 2\pi + \\
 &\quad + N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{3} + \\
 &+ \left[2M_f \omega_g \left(\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}} \right) + M_g \omega_f \left(\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}} \right) \right] 2\pi + N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

إذا كان n و m كبيرين بكفاية فإن الطرف الايمن يصبح اصغر من ε من اجل كل $t \in E$ في آن واحد، وهو المطلوب. انتهى البرهان.

14. 63. نتيجة. إذا كان شرط ليشيتز من الرتبة $\alpha > 0$:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq C |h|^\alpha$$

محققا من اجل كل نقطة t من مجموعة $E \subset Q$ وكان الثابت C لا يتعلق بالنقطة $t \in E$ فإن سلسلة فوريي التابع $f(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على E . بصفة خاصة إذا قبل التابع $f(t)$ مشتقا محدودا على مجال $[c, d] \subset Q$ (على التوالي مشتقا من اليمين أو من اليسار عند النقطتين c و d) فإن شرط ليشيتز من الرتبة 1 متوفر من اجل كل

$$|h| \leq \delta \text{ مها كان المجال الداخلى في } [c + \delta, d - \delta] :$$

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |h| \sup_{t \in [c, d]} |f'(t)| ;$$

وبالتالي فإن سلسلة فوريي للتابع $f(t)$ متقاربة نحو بانتظام

على كل مجال $[c + \delta, d - \delta]$.

14. 73. إذا لم يتحقق شرط ديني عند نقطة فإن النظرية 14. 33 لا تقوم

وقد تكون سلسلة فوريي التابع $f(t)$ متباعدة (سرى ذلك في 14. 15)

لا يمكن أن تتحقق العلاقة

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{m, n}(t_0) = f(t_0)$$

الا بمفهوم الانتقال المعمم الى النهاية. من الطبيعي اعتبار، باديء ذي بدء،

المجاميع الجزئية المتناظرة:

$$s_{n,n}(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}.$$

بخصوص المجموع الجزئي المتناظر $s_{n,n}(t)$ (نرمز له في المستقبل بـ $s_n(t)$ فقط) نحصل من 13.14 (1) على العبارة التالية:

$$(1) \quad s_n(t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})h} - e^{-i(n+\frac{1}{2})h}}{\sin \frac{h}{2}} dh =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) h}{\sin \frac{h}{2}} dh = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) D_n(h) dh,$$

$$D_n(h) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) h}{\sin \frac{h}{2}} \quad \text{حيث}$$

يمثل نواة ديركليت. لو شكلت التتابع $D_n(h)$ متتالية في شكل دلتا من اجل النقطة 0 لاستطعنا تطبيق النظرية 55.12 - ب والحصول مباشرة على تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي للتابع $f(t)$ نحو قيمته $f(t_0)$ عند كل نقطة استمرار t_0 لـ $f(t)$. لكن التتابع $D_n(h)$ لا تشكل متتالية في شكل دلتا، ذلك ما سزاه ضمن 15.14؛ زيادة على ذلك نجد، بوضع $f(t) \equiv 1$ في (1)، $s_n(t) \equiv 1$ و:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(h) dh = 1.$$

باستخدام هذه الخصائص سندرس تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي للتابع $f(t)$ في نقاط تقطعه من النمط الاول. 83.14 . سلوك سلسلة فوريي في نقاط تقطع التابع $f(t)$ من النمط الاول.

لتكن t_0 نقطة تقطع من النمط الاول للتابع $f(t)$ ، بحيث توجد القيمتان:

$$f(t_0+0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t), \quad f(t_0-0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t).$$

نفرض ان شرطي ديني الوحيدى الجانب محققان اي ان التكاملين :

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} \left| \frac{f(t)-f(t_0+0)}{t} \right| dt, \quad \int_{t_0-\delta}^{t_0} \left| \frac{f(t)-f(t_0-0)}{t} \right| dt$$

متقاربان من اجل عدد $\delta > 0$. عندئذ تكتب الكمية $s_n(t_0)$ ، كما

سبق ، على النحو :

$$s_n(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(t_0+h)] D_n(h) dh.$$

بادخال القيمتين $f(t_0+0)$ و $f(t_0-0)$ نحول العبارة المحصل عليها :

$$\begin{aligned} s_n(t_0) &= \int_{-\pi}^0 [f(t_0+h) - f(t_0-0)] D_n(h) dh + \\ &+ \int_0^{\pi} [f(t_0+h) - f(t_0+0)] D_n(h) dh + \\ &+ f(t_0-0) \int_{-\pi}^0 D_n(h) dh + f(t_0+0) \int_0^{\pi} D_n(h) dh = \\ &= I_1 + I_2 + [f(t_0-0) + f(t_0+0)] \int_0^{\pi} D_n(h) dh, \end{aligned}$$

حيث استعملنا جوزية نواة ديركليت $D_n(h)$. يتبين من التوطئية

23.14 ان الكميتين I_1 و I_2 تؤولان الى الصفر عندما يؤول n الى ∞ .

ان الحد الاخير لا يتعلق بـ n وهو يساوي $\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$.

وهكذا إذا تحقق شرطاً ديني الوحيدا الجانب عند نقطة تقطع من النمط

$$f'(t_0+0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0+0)}{h}, \quad \text{المشتقان:}$$

$$f'(t_0-0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0-0) - f(t_0-h)}{h},$$

فإن المجاميع الجزئية لسلسلة فوريي التابع $f(t)$ تتقارب نحو العدد

$$\frac{1}{2} [f(t_0+0) + f(t_0-0)].$$

إذا وضعنا سلسلة فوريي التابع $f(t)$ على الشكل :

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos kt + b_n \sin kt),$$

فإن المجموع الجزئي من الرتبة n لهذه السلسلة:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

مطابق، كما رأينا ضمن 32.14، للمجموع المتناظر من الرتبة n للتابع $f(t)$ ، في شكله العقدي؛ إذن فإن نص النظرية حول تقارب السلسلة، (1) هو نفس النص في نقاط الاستمرار (حيث يتحقق شرط ديني ثنائي الجانب) وفي نقاط التقطع من النمط الاول (حيث يتحقق شرطا ديني الوحدوي الجانب).

نشير ايضا الى ان حشد حدود السلسلة (1) المشار اليه بالاقواس لا يؤثر في طبيعة السلسلة ذلك لأن $a_n \rightarrow 0$ و $b_n \rightarrow 0$ (62.14 - أ).
§ 4.14. خاصيات اخرى لسلاسل فوري. تطبيقات.

14.14. حساب معاملات فوري. نشير هنا لبعض الخصائص البسيط لمعاملات فوري، التي تسهل علينا حساب هذه المعاملات.

أ. إذا كان $f(t)$ زوجيا، أي إذا كان $f(-t) = f(t)$ فإن لدينا

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0,$$

وينشر $f(t)$ حسب سلسلة فوري وفق التتابع $\cos nt$. زيادة على ذلك:

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt.$$

ب. إذا كان $f(t)$ تابعا فرديا، أي $f(-t) = -f(t)$ فإن لدينا:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0,$$

وينشر $f(t)$ حسب سلسلة فوري وفق التتابع $\sin nt$. زيادة على

$$(2) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

24.14. أ. ليكن $f(t)$ تابعا كثير الحدود بتقطع، أي ان المجال

$[-\pi, \pi]$ ينقسم الى عدد منته من المجالات $[t_j, t_{j+1}]$ ،

z بدون نقاط داخلية مشتركة، بحيث يتطابق التابع مع

كثير حدود $p_j(t) = \sum_{k=0}^j p_{jk} t^k$ على المجال $[t_j, t_{j+1}]$ عندئذ يكون:

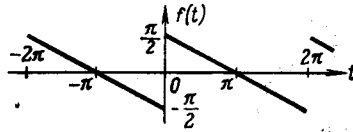
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j(t) e^{-int} dt.$$

نحوّل كل حد بالمكاملة بالتجزئة.

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j(t) e^{-int} dt &= p_j(t) \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} p'_j(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt = \\ &= \frac{1}{in} [p_j(t_j) e^{-int_j} - p_j(t_{j+1}) e^{-int_{j+1}}] - \frac{i}{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p'_j(t) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

نكامل عددا منتهيا من المرات فنحصل على عبارة خالية من التكاملات وتأخذ معاملات فورييه شكل كثير حدود لـ $1/n$ و e^{int_j} . يبين الحساب المائل للمعاملات a_n و b_n انها تمثل كثيرات الحدود لـ $1/n$ و

$$\sin nt_j \quad \text{و} \quad \cos nt_j$$



الرسم 2.14

ينتج من النظريات العامة الواردة في 3.14 ان سلسلة فورييه كل تابع كثير حدود بتقطع $f(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ عند كل نقطة استمرار لـ $f(t)$. إن هذا التقارب منتظم على كل مجال لا يحوي داخله ولا على حافته نقاط تقطع للتابع $f(t)$. ثم إن المجاميع المتناظرة تتقارب عند كل نقطة تقطع نحو القيمة $\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]$.

ب. مثال. نعتبر التابع $f(t) = \frac{\pi-t}{2}$ ($0 < t < \pi$) الممتد بصفة فردية على المجال $-\pi < t < \pi$ ، ثم بصفة دورية بدورة 2π على كل المحور $-\infty < t < \infty$ (الرسم 2.14). طبقا لـ 14.14 - ب فإن التابع

$f(t)$ ينشر حسب سلسلة فورييه وفق التتابع $\sin nt$ ، ومنه :

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^{\pi} \frac{\pi-t}{2} \sin nt dt = \frac{\pi-t}{2} \frac{\cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} dt = \frac{\pi}{2n}.$$

$$\frac{\pi-t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}, \quad : (0, 2\pi) \text{ على}$$

حيث ان السلسلة متقاربة عند كل نقطة $t \in (0, 2\pi)$ بانتظام في كل مجال $[\delta, 2\pi - \delta]$ ، $\delta > 0$. ثم إن مجموع السلسلة منعدم بفضل 83.14 عند النقطتين $t = 0$ و $t = 2\pi$.

ج. يمكن في بعض الحالات ، عندما تعطى المعاملات a_n و b_n في شكل كثيرات حدود لـ $1/n$ ، $\cos nt_j$ ، $\sin nt_j$ ، جمع سلسلة فورييه والحصول على دستور صريح للتابع كثير الحدود بتقطع $f(t)$ [12] . ورغم هذا فإن هناك سلاسل بسيطة جداً لا تمثل سلسلة فورييه تابع كثير حدود بتقطع كما هو حال السلسلة $\sum_1^{\infty} \frac{\cos nt}{n}$ (راجع 14.14) .

34.14 . العلاقة بين قابلية اشتقاق التابع $f(t)$ ورتبة تناقص معاملات فورييه $f(t)$.

أ. ليكن $f(t)$ تابعا مستمرا على الدائرة $Q = [-\pi, \pi]$ له مشتق $f'(t)$ مستمر بتقطع . ولتكن c_n معاملات فورييه التابع $f(t)$ (بالنسبة للجملية e^{int}) و c'_n معاملات فورييه التابع $f'(t)$. لدينا :

$$(1) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt = \frac{c'_n}{in}.$$

إن الحد الخالي من التكامل منعدم هنا لأن $f(-\pi) = f(\pi)$ حسب فرض استمرار التابع $f(t)$ على كل الدائرة Q . ثم إن الاعداد c'_n بصفتها معاملات فورييه لتابع مستمر بتقطع تؤول الى الصفر؛ نرى إذن ان معاملات فورييه التابع $f(t)$ قابل للإشتقاق تؤول الى الصفر اسرع من

1/n. من جهة اخرى فإن سلسلة الاعداد $|c_n|$ متقاربة، وهو ما يأتي

$$|c_n| = \frac{1}{|n|} |c'_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c'|^2 \right) \quad \text{من المتراجحة:}$$

ومن تقارب سلسلة الاعداد $|c'_n|^2$. (بالنظر الى مقياس فيراشتراس 356 نلاحظ أن ذلك يبين، بدون استعمال النظرية 63.14 التقارب المنتظم لسلسلة فوريى لتابع $f(t)$ يحقق الشروط المفروضة في هذا البند) اذا كان التابع $f(t)$ مستمرا ولم نفرض وجود مشتقة فإن تقارب سلسلة الاعداد $|c_n|$ غير محقق عموما ذلك ماسنراه ادناه (35.14).

ب. إذا كان التابع $f(t)$ مستمرا وله مشتقات مستمرة حتى الرتبة $(m-1)$ وكان المشتق $f^{(m)}(t)$ مستمرا بتقطع فإننا نستطيع مواصلة تحويل (1) بان نرسم بـ $c_n^{(k)}$ لمعاملات فوريى التابع $f^{(k)}(t)$:

$$(2) \quad c_n = \frac{c'_n}{in} = \frac{c''_n}{(in)^2} = \dots = \frac{c_n^{(m-1)}}{(in)^{m-1}} = \frac{c_n^{(m)}}{(in)^m} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

تشكل المعاملات $c_n^{(m-1)}$ في هذه الحالة سلسلة متقاربة مطلقا (راجع أ)؛ وبالتالي، اضافة الى العلاقات (2)، يمكن كتابة العبارة التالية للمعاملات c_n :

$$c_n = \frac{e_n}{|n|^{m-1}} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

حيث السلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} |e_n|$ متقاربة.

44.14. أ. يمكن كتابة القضايا السابقة عكسياً ولو جزئياً. نفرض أن المعاملات c_n لتابع $f(t)$ لها الشكل:

$$c_n = \frac{\theta_n}{|n|^m}, \quad |\theta_n| \leq c, \quad m \geq 2,$$

$$c_n = \frac{e_n}{|n|^{m-2}}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |e_n| < \infty, \quad m \geq 2. \quad \text{او}$$

عندئذ يكون لـ $f(t)$ مشتقات مستمرة بما فيها المشتق من الرتبة $(m-2)$. ذلك ان سلسلة فوريى التابع $f(t)$ ، ضمن الفرض الوارد، متقاربة بانتظام (حسب مقياس فيراشتراس) كما هو الحال فيما يخص

السلاسل التي نحصل عليها بالإشتقاق المتوالى الشكلي حتى الرتبة: $m - 2$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \equiv s_0(t),$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in) e^{int} \equiv s_1(t),$$

.....

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in)^{m-2} e^{int} \equiv s_{m-2}(t).$$

نرى، بفضل 62.14 ج ان التابع $f(t)$ مطابق لـ $s_0(t)$. ثم من النظرية 87.9 الخاصة باشتقاق متتالية توابع فإن التابع $s_0(t)$ يقبل الاشتقاق ومشتقة يطابق $s_1(t)$ ؛ لدينا نفس الشيء فيما يخص التابع $s_1(t)$ الخ...، اخيرا نرى التابع $f(t)$ يقبل الاشتقاق باستمرار $m - 2$ مرة.

ب. إذا كان للتابع $f(t)$ مشتقات مستمرة من كل الرتب $m = 1, 2, \dots$ فإن معاملات فوريى هذا التابع تحقق المتراجحات.

$$(1) |c_n| \leq \frac{\theta_m}{|n|^m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

وبالتالي فهي تتناقص بسرعة تفوق سرعة اية قوة $|1/n|$ وبالعكس إذا كانت معاملات فوريى تابع $f(t)$ تحقق المتراجحات (1) من اجل كل $m = 1, 2, \dots$ فإنه يتبين مما ورد اعلاه ان التابع $f(t)$ مستمر ومشتقاته من كل الرتب مستمرة. وهكذا فإن صنف التوابع القابلة للإشتقاق لا نهائيا تحده الشروط (1) المفروضة على معاملات فوريى c_n .
تحديدا تاما.

14. 54* مسألة المحيطات المتساوية. هي المسألة التقليدية التالية: اوجد، من بين المنحنيات المستوية المغلقة والمرنة بتقطع ذات طول معطى، المنحنى الذي يحيط باكبر مساحة ممكنة. إن حل هذه المسألة هو الدائرة لإثبات ذلك نقوم، كما فعل هورويتز (Hurwitz)، بالإنشاء التالي. ليكن $z(s) = x(s) + iy(s)$ التمثيل الوسيطى لمنحنى مستو مغلق وموون

بتقطع L ، اما طول القوس s فيمثل الوسيط (36.9 - ص). نفرض بادي
 ذي بدء ان الطول الكلي للمنحنى L يساوي 2π بحيث يكون
 $z(2\pi) = z(0)$. نكتب شرطي فوري للتابعين $x(s)$ و $y(s)$:

$$(1) \quad x(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns),$$

$$(2) \quad y(s) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^{\infty} (c_n \cos ns + d_n \sin ns); \quad \text{لدينا من 34.14 - أ:}$$

$$x'(s) = \sum_1^{\infty} (-na_n \sin ns + nb_n \cos ns),$$

$$y'(s) = \sum_1^{\infty} (-nc_n \sin ns + nd_n \cos ns).$$

بما ان $[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1$ (36.9 - ص) نجد بواسطة 52.14 (1) :

$$(3) \quad 2\pi = \int_0^{2\pi} \{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2\} ds = \\ = \pi \sum_1^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

ثم من تطبيق الدستور 49.9 (4) باعتبار المساحة G الواقعة داخل منحنى
 مغلق وبمراعاة 52.14 (3) نجد:

$$(4) \quad G = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [xy'(s) - yx'(s)] ds = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n d_n - b_n c_n).$$

انطلاقا من العلاقتين (3) و (4) يأتي:

$$(5) \quad 2 - \frac{2G}{\pi} = \sum_1^{\infty} \{n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2n (a_n d_n - b_n c_n)\} = \\ = \sum_1^{\infty} \{(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)\} \geq 0.$$

وهكذا فإن المساحة G الواقعة داخل منحنى مغلق طوله 2π لايتجاوز
 π . نعالج حالة المساواة في (5)؛ من اجل كل $n = 1, 2, \dots$ لدينا:

$$na_n - d_n = 0, \quad nb_n + c_n = 0, \quad (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2) = 0.$$

بصفة خاصة نحصل في حالة $n > 1$ على $c_n = d_n = 0$ ومنه $a_n = b_n = 0$

من نفس الاعداد $n > 1$. بوضع $n = 1$ نجد $a_n = d_n, b_n = -c_n$.
 يأتي حينئذ من (3) أن $a_1^2 + b_1^2 = 1$ ويمكننا وضع $a_1 = \cos \alpha, b_1 = \sin \alpha$.
 بنقل ذلك في (1) و (2) نحصل في الاخير على:

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + \cos(s - \alpha),$$

$$y(s) = \frac{c_0}{2} + \sin(s - \alpha);$$

إن هذا المنحنى هو الدائرة المتمركزة في النقطة $(a_0/2, c_0/2)$ ذات نصف القطر إذا كان الطول الكلي للمنحنى L يساوي عدد $l \neq 2\pi$ نجري التحويل $x' = 2\pi x/l, y' = 2\pi y/l$ "الذي يحول المنحنى L الى منحنى L' طوله 2π (36.9 - د) يحيط بالمساحة $G' = (2\pi/l)^2 G$ (16.9 - د, ر). مما رأينا يأتي:

$$G' \leq \pi, G \leq \frac{l^2}{4\pi},$$

اما في الحالة الحدية التي يكون فيها L' دائرة نصف قطرها 1 فإن المنحنى L هو ايضا دائرة لكن نصف قطرها يساوي $l/(2\pi)$.

64. 14 . استعمال المتغير العقدي . نرسم لنقاط دائرة الوحدة

$$Q = \{x^2 + y^2 = 1\} \text{ بالمتغير العقدي } z = x + iy = e^{it} \text{ لـ } -\pi \leq t \leq \pi$$

نضع $f(t) \equiv F(z)$. تأخذ سلسلة فورييه التابع $f(t)$ الشكل:

$$(1) f(t) \equiv F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

كنا التقينا في 54. 10 بسلسلة من الشكل (1) وفق قوى z (سلسلة لوران). يمكن التعبير عن المعاملات c_n بالتكاملات بالنسبة لـ t كما سبق ان فعلنا ويمكن ايضا التعبير عنها بالتكاملات بالنسبة للمتغير العقدي

$$z \text{ وذلك باستعمال المساواة: } dz = ie^{it} dt = iz \dot{t}.$$

التي يأتي منها:

$$(2) c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} F(z) z^{-n-1} dz$$

إذا كان التابع $F(z)$ يقبل التمديد تحليليا داخل دائرة الوحدة فإن

سلسلة لورانت، وبالتالي سلسلة فوريي ايضا، تصبح سلسلة تايلور:

$$F(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n.$$

74. 14. مثال. لنحسب مجموع السلسلة $\sum_1^{\infty} \frac{\cos nt}{n}$. يمكن كتابة:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos nt}{n} + i \sum_1^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \sum_1^{\infty} \frac{e^{int}}{n},$$

وهذا ما يردنا الى مسألة حساب المجموع $\sum_1^{\infty} \frac{e^{int}}{n}$ او المجموع $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}$. نلاحظ ان مجموع السلسلة الاخيرة تنتج بكاملة حدا حدا من 0 الى z^1 السلسلة:

$$\sum_0^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}$$

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} = - \int_1^{1-z} \frac{d\omega}{\omega} = -\ln(1-z), \quad \text{نعم (75. 10) ان:}$$

هذا ان اخترنا كسبيل للمكاملة في مستوى العناصر ω منحنيا لا يقطع نصف المحور الحقيقي السالب، وهذا يوافق في مستوى العناصر ζ ($1 - \zeta = \omega$) منحنيا لا يقطع الجزء $1 \geq \zeta$ من نصف المحور الحقيقي الموجب. يكفي ان نكامل على طول قطع المستقيمت $[0, z]$ (وهو ما يضمن وحدانية تعيين التابع $(-\ln(1-z))$. ان السلسلة (1) متقاربة من اجل $|z| < 1$ بحيث نجد:

$$(2) \quad -\ln(1-z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

من اجل $|z| < 1$ ثم ان السلسلة (2) متقاربة ايضا من اجل $|z| = 1$ $z \neq 1$ (36.6 - ج)؛ بما ان التابع $\ln(1-z)$ يبقى مستمرا عند هذه النقاط فإن المساواة (2) تبقى قائمة من اجل تلك النقاط حسب نظرية آبل 76.6. لدينا من اجل كل $w = |w| e^{i \arg w}$, (75. 10):

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w$$

بصفة خاصة ان كان $z = e^{it}$, $\text{Im } z > 0$, فإن طولية وعمدة الكمية

$1 - z$ يمكن تعيينها بسهولة حسب الرسم 3.14. لدينا:
 $|1 - z| = 2 \sin \frac{t}{2}$, $\arg(1 - z) = \frac{t - \pi}{2}$

$$\ln |1 - z| = \ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right), \quad \text{ثم}$$

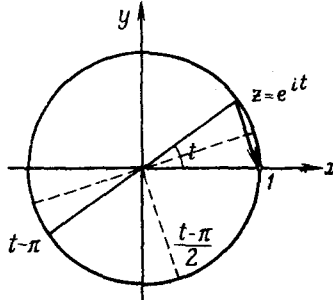
$$\ln(1 - z) = \ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) + i \frac{t - \pi}{2}$$

ومنه، من اجل $t \in (0, 2\pi)$.

$$\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1 - z) = -\ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) + i \frac{\pi - t}{2}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right), \quad \sum_1^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

مع العلم انه سبق الحصول على مجموع السلسلة $\frac{\sin nt}{u}$ (24.14 - ب)



الرسم 3.14

84.14 * مسألة الحلول الدورية. لتكن:

$$(1) \quad a_0 u^{(m)}(t) + a_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + a_m u(t) = g(t)$$

معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة طرفها الثاني $g(t)$ دوري دورته 2π . السؤال المطروح هو هل تقبل هذه المعادلة حلا $u(t)$ دورته 2π .

نبحث عن مثل هذا الحل في شكل سلسلة فورييه:

$$(2) \quad u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k e^{ikt},$$

حيث ترمز u_k للمعاملات المجهولة. بافتراض انه من الشرعي الاشتقاق حدا حدا m مرة السلسلة (2) وبوضع:

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m \equiv p(\lambda)$$

$$(3) \sum_{-\infty}^{\infty} u_h p(ik) e^{iht} = a_0 u^{(m)}(t) + \dots + a_m u(t).$$

من جهة اخرى، نعتبر:

$$(4) \quad g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_h e^{iht}$$

وهو نشر فوريى التابع $g(t)$. نقارن النشرين المتعامدين (3) و (4) فنجد من اجل كل $0 = \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$g_h = p(ik) u_h,$$

ومنه، من اجل $p(ik) \neq 0$ ،

$$u_h = \frac{g_h}{p(ik)}$$

وبالتالي فالحل المطلوب هو:

$$(5) \quad u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{g_h}{p(ik)} e^{iht}.$$

تؤدي هذه الاستدلالات الكشفية الى النصين المواليين:

أ. نفرض ان معاملات فوريى التابع الدوري $g(t)$ تشكل سلسلة متقاربة مطلقا (مثلا، $g(t)$ مرن بتقطع). إذا لم ينعدم $p(ik)$ من اجل $0 = \pm 1, \pm 2, \dots$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا دورياً وحيداً.

ذلك اننا نلاحظ الفرض الوارد انه كثير الحدود $p(ik)$ من الدرجة

m تقبل التحديد من الادنى التالي:

$$|p(0)| \geq c, \quad |p(ik)| \geq c |k|^m \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ومنه ينتج أن

$$\left| \frac{g_h}{p(ik)} \right| \leq \frac{|g_h|}{c |k|^m}$$

بفضل 44.14 - أ فإن التابع $u(t)$ المعروف بالمساواة (5) يقبل مشتقات مستمرة بما فيها المشتق من الرتبة m ، ويمكن الحصول على هذه المشتقات بالاشتقاق حدا حدا في السلسلة (5). بنقل ذلك الى المعادلة (1) نلاحظ ان هذه الاخيرة محققة إذا وجد زيادة على الحل الدوري الموجود حل دوري آخر فإن الفرق $v(t)$ بينها حل دوري للمعادلة:

$$(6) \quad a_0 v^{(m)}(t) + a_1 v^{(m-1)}(t) + \dots + a_m v(t) = 0.$$

نحن نعرف الحل العام للمعادلة (6)، الذي يكتب بدلالة التوابع ذات الشكل $e^{i\lambda t}$ ، حيث $p(\lambda) = 0$ (81.13). إن هذه التوابع الاسية لا تؤدي الى حلول دورية دورتها 2π إلا إذا كان $\lambda = ik$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). بما ان الفرض ينص على كون هذه العلاقات غير محققة فإنه لا يوجد حل دوري غير منعدم للمعادلة (6). وهو الامر الذي يثبت وحدانية الحل الدوري للمعادلة (1).

ب. إذا كان $p(ik) = 0$ من اجل بعض الاعداد الصحيحة $k = k_1, k_2, \dots, k_r$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا دوريا دورته 2π إذا وفقط إذا كان $g_{k_j} = 0$ ($j = 1, \dots, r$) (يبقى فرض النظرية السابقة حول التقارب المطلق لسلسلة الاعداد g_k قائما)؛ إن هذا الحل معرف بتقدير الحد الجمعي $\sum_{j=1}^r c_j e^{ik_j t}$ ، حيث c_j ثوابت كيفية.

ذلك انه إذا كان $g_k = 0$ ($k = 1, \dots, r$) فإن العبارة (5) بالثوابت الكيفية c_j المتعلقة بالمعاملات $\frac{g_{k_j}}{p(ik_j)}$ (التي هي من الشكل $0/0$ في الحالة الراهنة) تمثل كما هو الحال في أ حلا دوريا للمعادلة (1). إذا كان لدينا $p(ik) = 0, g_q \neq 0$ من اجل عدد $k = q$ فإن نقل تلك العبارة في المعادلة (1) وبالضرب سلميا المتطابقة المحصل عليها في e^{-iqt} نرى ان $p(iq) = g_q = 0$: يعني ذلك ان المعادلة (1) لا تقبل دوريا إن البرهان على النقطة الاخيرة من النظرية مماثل للبرهان الوارد في أ.

14. 94*. نختار من بين التطبيقات العديدة لسلاسل فوريى في مسائل الفيزياء الرياضية تطبيقين وهما: حل مسألة ذبذبة وتر متجانس ومسألة وجه توازن غشاء دائري.

أ. نفرض ان لدينا وترا مثبتا عند النقطتين 0 و π من محور العناصر x وان هذا الوتر يطابق في حالة التوازن المجال $[0, \pi]$ (الرسم 4.14). إذا اعطينا للوتر شكلا كفييا ممثلا، على سبيل المثال، بتابع $f(x)$ ثم تركناه حرا فإنه يدخل في حركة تذبذبية. مرادنا حينئذ هو إيجاد التابع $u(t, x)$

الذي يعين شكل الوتر في اللحظة t . تستنتج المعادلة التي يخضع لها التابع $u(t, x)$ من الفيزياء الرياضية وهي تكتب عند اعتبار بعض الشروط المختصرة، على الشكل:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2},$$

حيث a ثابت. يجب حل هذه المعادلة ضمن الشرطين الابتدائيين التاليين:

$$(1) \quad u(0, x) = f(x) \quad (\text{الشكل الابتدائي معطى})$$

$$(2) \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0 \quad (\text{السرعة الابتدائية منعدمة}).$$

نقوم بحل هذه المسألة باستعمال سلاسل فورييه. لننشر التابع $u(t, x)$ المعروف من اجل كل $t \geq 0$ مثبت على المجال $[0, \pi]$ حسب سلسلة فورييه وفق التتابع $\sin nx$:

$$(2) \quad u(t, x) = \sum_1^{\infty} b_n(t) \sin nx.$$

علينا تعيين المعاملات $b_n(t)$. نلاحظ ان الشرطين الابتدائيين (1) و

(2) محققان إن اخترنا المعاملات بحيث:

$$(3) \quad b_n(0) = b_n \quad \text{هو معامل فورييه التابع } f(x)$$

$$(4) \quad b'_n(0) = 0.$$

ينبغي الآن على التابع (2) ان يحقق المعادلة (1). لدينا بصفة شكلية:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \sum_1^{\infty} b''_n(t) \sin nx,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = - \sum_1^{\infty} n^2 b_n(t) \sin nx.$$

تكون المعادلة (1) محققة إن كان لدينا من اجل كل $1, 2, \dots$:

$$(5) \quad b''_n(t) = -a^2 n^2 b_n(t).$$

إن حل المعادلة (5) بالشرطين الابتدائيين (3) و (4) هو:

$$(6) \quad b_n(t) = b_n \cos a nt,$$

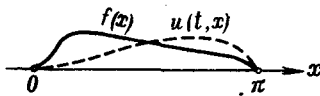
وبذلك ياخذ الحل (2) الشكل النهائي.

$$(7) \quad u(t, x) = \sum_1^{\infty} b_n \cos a nt \sin nx.$$

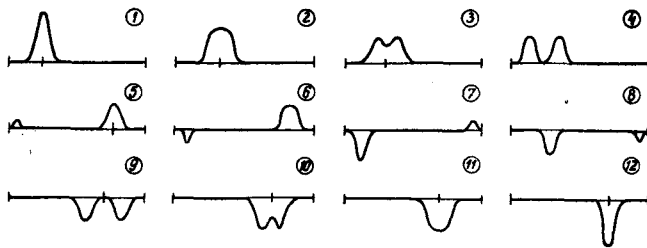
يكون الاشتقاق الشكلي في (3 و 4) شرعياً إذا كانت السلسلتان الواردتان فيها ضمن الطرف الثاني متقاربتين بانتظام بمراجعة (6) يكفي من أجل

$$\sum_1^{\infty} b_n n^3 \cos a n t \sin n x \quad \text{ذلك ان تكون السلسلة:}$$

متقاربة بانتظام على المجال $0 \leq x \leq \pi$ ؛ ويتحقق ذلك بدوره إن كانت السلسلة $\sum_1^{\infty} |b_n| n^2$ متقاربة. ثم إننا نلاحظ ان السلسلة الاخيرة تكون متقاربة عندما يكون التابع $f(x)$ مستمراً وكذا مشتقة الاول والثاني ويكون مشتقة الثالث مستمراً بتقطيع (44.14 - أ)



الرسم 4.14



الرسم 5.14

نشير الى انه بالإمكان وضع الحل (7) في شكل لا يتطلب اي اشتقاق للتابع $f(x)$. هذا الشكل يتضح من كون

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} b_n [\sin n(x+at) + \sin n(x-at)] = \\ &= \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)]. \end{aligned}$$

نقصد هنا بـ $f(x+at)$ و $f(x-at)$ في حالة خروج المتغير $x+at$ (او $x-at$) من ساحة اتالتعريف الابتدائي $[0, \pi]$ للتابع $f(x)$ ، نتيجة الامتداد الفردي لـ $f(x)$ على المجال $[-\pi, 0]$ متلوأ

بالامتداد الدوري، الذي دورته 2π ، على كل المحور $-\infty < x < \infty$

هناك سؤال مطروح: ما معنى القول ان التابع (8) يحقق المعادلة (1) عندما لا يقبل التابع $f(x)$ مشتقا ثانيا؛ تجيب الفيزياء الرياضية دون صعوبة معتبرة عن مثل هذه الاسئلة بتعميم مفهوم الحل ذاته، سوف لن نقدم تفاصيل حول هذه النقطة [11]. يبين الرسم 5.14 الوضعيات المتوالية للوتر المتذبذب التي يعيها الدستور (8)، مع العلم ان الوضعية الابتدائية هي الوضعية الاولى.

ب. وجه توازن غشاء دائري. نفرض ان غشاء وضع فوق القرص:

$$Q = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ وثبت بواسطة الدائرة } \Gamma = \{x^2 + y^2 = 1\},$$

ونفرض ان شكل الغشاء فوق هذه الدائرة معطى بتابع مستمر $z = f(t)$ للزاوية القطبية t . في حالة التوازن تحت تأثير قوى التمدط) ياخذ الغشاء الشكل الممثل بتابع $z = u(x, y)$ (الرسم 6.14). نستنتج المعادلة التي تخضع لها هذا التابع من الفيزياء الرياضية؛ وهي ممثلة ضمن بعض الشروط المختصرة بمعادلة لابلاس:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

يجب البحث عن حل $u(x, y)$ للمعادلة (9) مستمر في كل القرص Q (نقول عن مثل هذه التتابع إنها توافقية؛ راجع 8.10) ويساوي التابع $f(t)$ على المنحنى Γ .

لايجاد $u(x, y)$ نشر التابع $f(t)$ حسب سلسلة فوريي:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

نستعمل الرمز \sim من المحتمل الا تتقارب سلسلة فوريي التابع المعطى

$f(t)$ نحو نفس التابع (سرى ذلك في 15.14). نضع ضمن

الاحداثيات القطبية:

$$(10) \quad u(r, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} r^n (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (r < 1).$$

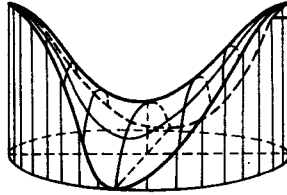
إن التابع $u(r, t)$ هو الجزء الحقيقي للتابع التحليلي

$$(11) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n - ib_n) z^n \quad (r = |z| < 1),$$

وبالتالي فهو يحقق معادلة لابلاس (81.10) داخل القرص Q . لنثبت ان الشروط الاخرى محققة ايضا. نكتب معاملات فوريى بشكل صريح فيأتي:

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) (\cos nt \cos n\tau + \sin nt \sin n\tau) r^n d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n \cos n(t-\tau) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

يمكننا هنا تغيير ترتيب الجمع والمكاملة لأن مقياس فيرستراس 35.6 يبين ان السلسلة المكتوبة بين حاضنتين متقاربة بانتظام بالنسبة لـ t من أجل $r < 1$.



الرسم 6.14

لدينا من 74.6 - س:

$$\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \theta + r^2)}$$

ومنه

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \tau) + r^2} d\tau =$$

$$(12) \quad = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) P_r(t - \tau) d\tau,$$

حيث

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad (r < 1);$$

يسمى هذا التابع نواة بواسون (Poisson)

بما ان مقام نواة بواسون له الشكل:

$$1 - 2r \cos t + r^2 = (1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2}$$

فإن هذه النواة غير سالبة. لتأكد انها تتمتع بخاصيات تابع لـ t في شكل دلتا من اجل $t \rightarrow 1$. نضع في (12) $f(t) \equiv 1$ فينتج من (10)

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\tau) d\tau = 1. \quad \text{إذن: } u(r, t) \equiv 1.$$

ثم، من اجل كل $\delta > 0$ ، لدينا التقدير:

$$\int_{|t| \geq \delta} P_r(\tau) d\tau \leq \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{|t| \geq \delta} \frac{d\tau}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\tau}{2}} \leq \frac{1-r^2}{4r \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

الذي يبين ان:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|t| \geq \delta} P_r(\tau) d\tau = 0.$$

بتطبيق النظرية 55.12 - ص على التوابع ذات الشكل دلتا نرى ان

التابع $u(r, t)$ المكمل بالقيم $f(t)$ على المنحنى Γ مستمر في القرص Q ، وهو المطلوب.

يُبرهن في نظرية المعادلات ذات المشتقات الجزئية على وحدانية الحل

الوارد اعلاه في صنف التوابع التوافقية [11].

ج - تستخلص من مسالة الغشاء هذه نتائج اخرى من بينها نتائج رياضية

محضة. ليكن $u(r, t)$ تابعا توافقيا داخل القرص $\{r \leq 1\}$ يأخذ على

الدائرة $r = 1$ القيم المستمرة المعطاة $f(t)$. حسب ما بينا في ب

وبمراعاة الملاحظة حول الوحدانية فإن الحل يكتب من اجل $r \leq 1$

بواسطة تكامل بواسون (12). تؤول معاملات فورييه a_n و b_n التابع

$f(t)$ الى الصفر من اجل $n \rightarrow \infty$ اما سلسلة تايلور (11) فإن نصف

قطر تقاربها لا يمكن ان يكون اصغر من 1، وبالتالي فهذه السلسلة تمثل في

القرص $r < 1$ تابعا تحليليا جزؤها الحقيقي هو التابع (12) (اي التابع

التوافقي المعطى) اما الجزء الخيالي للسلسلة (11) فيعطينا تابعا توافقيا

$v(r, t)$ مرافقا لـ $u(r, t)$. وهكذا يقبل كل تابع توافقي تابعا توافقيا مرافقا. نحصل على الشكل الصريح للتابع $v(r, t)$ بتعويض في الدستور (12) نواة بواسون $P_r(t)$ بتابعه التوافقي المرافق. هذا الاخير هو مجموع التوابع المرافقة لحدود السلسلة (10).

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^{\infty} r^n \sin nt = \frac{1}{2\pi} \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2}$$

(74.6 - س) لدينا في الختام فيما يخص التابع المطلوب $v(r, t)$ الدستور:

$$v(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{r \sin \tau}{1 - 2r \cos(t - \tau) + r^2} d\tau.$$

§ 14.5. تباعد سلاسل فورييه والجمع المعمم

15.14. إذا كان $f(t)$ تابعا مستمرا فإن مسألة تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فورييه، إن لم نفرض توفر شرط دينيء مسألة لا زالت لحد الساعة مفتوحة. فقد تبين ان هناك توابع مستمرة مجاميعها المتناظرة الخاصة بسلسلة فورييه مجاميع متباعدة (في نقاط منعزلة على الاقل). ينتج ذلك في الواقع، من كون نوى ديركليت لا تشكل متتالية في شكل دلنا او على وجه التحديد من كون:

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \infty,$$

وهو ما سنراه.

نحن نعلم انه يمكن كتابة مجموع جزئي متناظر $s_n(t)$ لسلسلة فورييه

لتابع $f(t)$ كما يلي (14.73 (1))

$$s_n(f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) D_n(h) dh,$$

$$D_n(h) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)h}{\sin \frac{h}{2}}. \text{ حيث:}$$

نضع للإختصار $t=0$ بحيث ان:

$$s_n(f, 0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(h) D_n(h) dh.$$

متتالية تابعيات خطية على الفضاء الباناخي $C^s(Q)$ المؤلف من كل التوابع

العقدية المستمرة على $[-\pi, \pi]$. سري ان نظيات هذه التابعيات اي

الاعداد:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)| dh.$$

(17.12 - ل) تؤول الى لا نهاية. سينتج من ذلك، حسب نظرية باناخ -

ستينهاوس (Banach - Steinhaus) (47.12 - أ)، وجود عنصر من

الفضاء $C^0(Q)$ اي تابع مستمر $f_0(t)$ تكون من اجله الاعداد

$s_n(f_0, 0)$ غير محدودة يعني ذلك ان سلسلة فوريى التابع $f_0(t)$ غير

متقاربة (حتى تناظرياً) عند النقطة $t = 0$.

اذن ترد المسألة الى اثبات العلاقة:

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)| dh = \infty.$$

بتطبيق المتراجحة $(0 \leq h \leq \pi)$ $\frac{h}{2} \leq \frac{h}{2}$ نكتب:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)| dh = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})h|}{\sin \frac{h}{2}} dh \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})h|}{h} dh.$$

نجري التعويض $(n + 1/2)h = t$ فنحصل على

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)| dh \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

تزايد الكمية الاخيرة لانهاثيا من اجل $n \rightarrow \infty$ وهذا حسب تباعد التكامل

الموسع لـ $|\sin t|/t$ في المجال $(0, \infty)$ (61.11 - أ). ذلك ما يبرر

هذا الانشاء*.

نشير الى وجود تابع $f_0(t)$ ، مع تباعد سلسلة فوريى، في كل كرة

من الفضاء $C^0(Q)$. من اجل

كل تابع من هذا النوع فإن سلسلة طويلات معاملات فوريى متباعدة هي

* يتبين من النظرية الحديثة لـ كارلسون (1966) ان نقاط تباعد سلسلة فوريى لتابع $f_0(t) \in C^0(Q)$

تقتل استثناء: من أجل كل $5 < 4$ ، فإن كل هذه النقاط يمكن تغطيتها بجماعة قابلة للعد من

المجالات مجموع اطوالها اصغر من 4.

الآخري لأن تقاربها يؤدي، حسب مقياس فيرستراس، إلى التقارب المنتظم لسلسلة فورييه.

25. 14. هناك سؤال مطروح: هل يمكن تجاوز هذه العقبة باستخدام بعض طرق جمع السلاسل المتباعدة (67. 12)؟ نعتبر طريقة المتوسطات الحسابية (سيزارو (Cesàro) التي تتمثل في الانتقال من المتتالية الابتدائية:

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

لدينا هنا مباشرة إجابة عن السؤال المطروح:

نظرية (ل. فيجر Fejér، 1905) من أجل كل تابع $f(t)$ مستمر على الدائرة $Q = \{-\pi \leq t \leq \pi\}$ ، فإن متتالية المجاميع الجزئية المتناظرة لسلسلة فورييه $s_m(t) = \sum_{h=-m}^m c_h e^{iht}$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على Q بمفهوم سيزارو أي أن لدينا:

$$\text{C-lim}_{m \rightarrow \infty} s_m(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0(t) + s_1(t) + \dots + s_{n-1}(t)}{n} = f(t)$$

بانتظام على Q .

البرهان. طبقاً لـ 73. 14 فإن لدينا:

$$s_m(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_m(t-\tau) d\tau,$$

وبالتالي:

$$\sigma_n(t) \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} s_m(t) = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{m=0}^{n-1} D_m(t-\tau) d\tau.$$

ثم لدينا:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} D_m(h) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)h}{\sin \frac{h}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)h \sin \frac{h}{2}}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\cos mh - \cos(m+1)h}{2 \sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \cos nh}{2 \sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{n}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

إذن:

$$(1) \sigma_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{\sin^2 n \frac{t-\tau}{2}}{\sin^2 \frac{t-\tau}{2}} d\tau.$$

$$F_n(h) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 \frac{n}{2} h}{\sin^2 \frac{h}{2}} \text{ يسمى التابع}$$

نواة فيجر. خلافا لنواة ديركلت فإن هذا التابع غير سالب. ثم إذا كان

$$f(t) \equiv 1, \text{ فإن } s_n(t) \equiv 1 \text{ و } \sigma_n(t) \equiv 1. \text{ وينتج من (1) ان:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(h) dh = 1$$

اخيرا لدينا من اجل كل $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{|h|>\delta} F_n(t-\tau) d\tau &= \int_{|h|>\delta} F_n(h) dh \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi n} \int_{|h|>\delta} \frac{dh}{\sin^2 \frac{h}{2}} = \frac{C(\delta)}{2\pi n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

وهكذا فإن نواة فيجر يتمتع بكل خاصيات متتالية من الشكل دلتا

(55.12 - أ). بتطبيق النظرية الاساسية 55.12 - د على المتتاليات ذات

الشكل دلتا نجد $\sigma_n(t) \rightarrow f(t)$ وهذا التقارب منتظم بالنسبة لـ

$t \in Q$ ، وهو المطلوب.

35.14. إن الجمع بطريقة المتوسطات الحسابية حالة خاصة من الجمع

بواسطة مصفوفة توبليتز (76.12 - ج). من الطبيعي ان نتساءل عن

الشروط التي ينبغي فرضها على مصفوفة توبليتز $T = \|q_{nm}\|$ لكي

تقارب سلسلة فوريي اي تابع مستمر $f(t)$ نحو هذا التابع نفسه. نذكر

اننا طبقنا اعلاه مصفوفات توبليتز في جمع متتاليات محدودة؛ الا انه قد

تكون متتالية مجاميع جزئية لسلسلة فوريي تابع مستمر متتالية غير محدودة

(15.14)؛ لن نعتبر إذن سوى المصفوفات المثلثية لتوبليتز التي يحوى

سطرها من الرتبة n على الاكثر n عنصرا غير منعدم، والتي تسمح إذن

بانشاء، حسب اية متتالية عددية $c = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ ، التابعيات

$$T_n(c) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{nm} c_m = \sum_{m=0}^n q_{nm} c_m.$$

إن كانت $\lim T_n(c)$ موجودة، نضع تعريفاً $T\text{-}\lim c_n = \lim T_n(c)$

لتكن إذن $T = \|q_{nm}\|$ مصفوفة مثلثية لتوليتز و $Q = \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} |q_{nm}|$

لتكن

$$s(t) = \{s_m(t)\}, \quad s_m(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_m(t-\tau) d\tau \quad (m=1, 2, \dots)$$

متتالية المجاميع الجزئية المتناظرة لسلسلة فورييه تابع $f(t)$ ؛ يرمز

$D_m(t)$ دائماً لنواة ديركليت:

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \sum_{m=0}^n q_{nm} s_m(t) = \sum_{m=1}^n q_{nm} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_m(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left\{ \sum_{m=1}^n q_{nm} D_m(t-\tau) \right\} d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) Q_n(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

حيث

$$Q_n(t) = \sum_{m=1}^n q_{nm} D_m(t)$$

نظرية (س. نيكولسكي Nikolski 1948). إذا وجد ثابت $C > 0$

بحيث يتحقق، من اجل كل $0 = 1, 2, \dots$ ، المتراجحة:

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(t)| dt < C,$$

فإن $\lim T_n(s(t)) = f(t)$ بانتظام بالنسبة لـ $t \in [-\pi, \pi]$ من

اجل كل تابع مستمر $f(t)$. إن كان الامر غير ذلك، فإنه يوجد تابع

مستمر $f(t)$ تكون من اجله الكميات $T_n(s(t))$ بدون نهاية،

مثلاً، عند النقطة $t = 0$.

البرهان. بما ان الشرط (1) محقق، نثبت ان النوى $Q_n(t)$ تشكل

متتالية ذات الشكل دلنا.

لدينا في البداية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) dt = \sum_{m=1}^n q_{nm} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(t) dt = \sum_{m=1}^n q_{nm} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

بفضل خاصيات نواة ديركليت وعناصر مصفوفة توليتز. ثم، من اجل

كل $\delta > 0$ ، لدينا :

$$\left| \int_{|t| \geq \delta} Q_n(t) dt \right| = \left| \sum_{m=1}^n q_{nm} \int_{|t| \geq \delta} D_m(t) dt \right| \leq \sum_{m=1}^n |q_{nm}| D_{m\delta},$$

حيث

$$D_{m\delta} = \left| \int_{|t| \geq \delta} D_m(t) dt \right|$$

من اجل δ مثبت فإن الكمية $D_{m\delta}$ تؤول الى الصفر عندما $m \rightarrow \infty$ (23.14) وبالتالي فهي محدودة؛ نضع $D_\delta = \sup_m D_{m\delta}$. من اجل عدد $\varepsilon > 0$ معطى نبحث عن رقم m_0 بحيث $D_{m\delta} < \varepsilon/(2Q)$ عندما $m \geq m_0$. نختار بعد ذلك عددا N بحيث $|q_{nm}| \leq \varepsilon/(2m_0 D_\delta)$ من اجل $n > N$ ، $m \leq m_0$ ، بهذا امر يمكن بفضل خاصيات عناصر مصفوفة توبليتز. حينئذ نجد من اجل $n > N$:

$$\left| \int_{|t| \geq \delta} Q_n(t) dt \right| \leq \sum_{m=0}^{m_0} |q_{nm}| D_{m\delta} + \sum_{m_0+1}^n |q_{nm}| D_{m\delta} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ينتج من ذلك ان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|t| \geq \delta} Q_n(t) dt = 0.$$

نرى من (1) ان $Q_n(t)$ متتالية في شكل دلنا. بتطبيق النظرية الاساسية الخاصة بالمتتاليات ذات الشكل دلنا 55.12 - د نصل الى التقارب المنتظم للمتتالية $T_n(s(t))$ نحو $f(t)$ ، وبذلك ينتهي نرهان الجزء الاول من النظرية. اما الجزء الثاني فيأتي من نظرية باناخ - سينهاوس بنفس الطريقة الواردة في 15.14 .

إذا كانت النواة $Q_n(t)$ غير سالبة فإن الشرط (1) متوفر. ينتج ذلك من الدستور الاول الوارد في برهاننا. بصفة خاصة فإن نواة فيجر (25.14) من هذا النمط.

45.14 . طبقنا في 94.14 - ب مرة اخرى طريقة جمع معمم، فقد راينا

انه إذا كانت

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

هي سلسلة فورييه تابع مستمر $f(t)$ فإن الدستور التالي محقق:

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_1 (a_n \cos nt + b_n \sin nt) r^n \right\}$$

يمكن اعتبار الطرف الايمن من هذه المساواة كطريقة جمع معمم لسلسلة فورييه. تسمى هذه الطريقة طريقة الجمع المعمم بمفهوم بواسون وهي تطبق ايضا على توابع $f(t)$ متقطعة حتى ولو ان ذلك يؤدي الى نتائج اقل دقة.

§ 6. 14 . امثلة في الجمل المتعامدة.

16. 14 . المتعامدة. تمثل جملة التوابع المثلثية، مثالا نادرا نسبياً جملة متعامدة مشيدة بذاتها. ننشئ في العديد من الحالات جل متعامدة انطلاقاً من الجمل غير المتعامدة بطريقة « المتعامدة » الوارد وصفها في 34. 12 - ص نذكر بها هنا بايجاز. لتكن f_1, f_2, \dots جملة اشعة في فضاء هيلبرتي H (حقيقي او عقدي)، منتهية او غير منتهية ومستقلة خطياً اي ان كل جملة جزئية منتهية f_1, \dots, f_n مستقلة خطياً بالمفهوم الجبري المعتاد نعين الاشعة g_1, \dots, g_n, \dots بواسطة العلاقات التالية:

$$(1) \quad \begin{cases} g_1 = f_1, \\ g_2 = a_{21}f_1 + f_2, \\ g_3 = a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + f_3, \\ \dots \\ g_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + a_{n3}f_3 + \dots + f_n, \\ \dots \end{cases}$$

نبرهن ان الثوابت a_{jn} في الدساتير (1) يمكن اختيارها، وهذا بطريقة وحيدة، بحيث تكون الاشعة g_1, g_2, \dots متعامدة متنى متنى.

26. 14 . كثيرات حدود لوجندر (Legendre). نعتبر في الفضاء

هيلبرتي $H(-1, 1)$ جملة التوابع $f_0 \equiv 1, f_1 \equiv t, \dots, f_n \equiv t^n$ مستقلة خطياً ونطبق عليها نظرية المتعامدة. بما ان التوابع $1, t, \dots, t^n$ مستقلة خطياً فإن فرض النظرية محقق. نرمز لـ $L_n = L(-1, 1, t, \dots, t^n)$ للفضاء الجزئي

المؤلف من كثيرات الحدود التي لا تتجاوز درجتها k العدد n . إن التابع $g_n(t)$ كثير حدود درجته n معاملها الرئيسي يساوي 1. يتبين ان الدستور الصريح لكثير الحدود $g_n(t)$ هو:

$$(1) \quad g_n(t) = C_n [(t^2 - 1)^n]^{(n)},$$

وهذا مهما كان n .

لإثبات ذلك يكفي، بمراجعة الوجدانية الواردة في 16. 14، ان نلاحظ بأن كثير الحدود (1) الذي درجته n متعامد على التوابع:

$$1, t, \dots, t^{n-1}.$$

توطئة. إن التابع $(t^2 - 1)^n$ منعدم عند النقطتين 1 و -1 وكذا مشتقاته المتوالية بما فيها المشتق من الرتبة $(n - 1)$ ؛ اما مشتقة من الرتبة n فهو غير منعدم عند هاتين النقطتين.

البرهان. ينتج من التمثيل $(t^2 - 1)^n = (t + 1)^n (t - 1)^n$ ومن دستور ليبنيتز 21.8 (3). بصفة خاصة:

$$(2) \quad [(t^2 - 1)^n]^{(n)}|_{t=1} = [(t + 1)^n (t - 1)^n]^{(n)}|_{t=1} = 2^n \cdot n!$$

نظرية. إن كثير الحدود (1) متعامد في الفضاء $H(-1, 1)$ على التوابع $1, t, \dots, t^{n-1}$.

البرهان. نكامل بالتجزئة فنجد من اجل $k < n$:

$$(t^k, [(t^2 - 1)^n]^{(n)}) = \int_{-1}^1 t^k [(t^2 - 1)^n]^{(n)} dt =$$

$$= t^k [(t^2 - 1)^{n(n-1)}]_{-1}^{+1} - k \int_{-1}^1 t^{k-1} [(t^2 - 1)^{n(n-1)}] dt.$$

إن الحدود الواردة بدون تكامل تنعدم في التوطئة. تكامل بالتجزئة التكامل المتبقي ونواصل حتى يصبح اس t منعدما:

$$(t^k, [(t^2 - 1)^n]^{(n)}) = -k t^{k-1} [(t^2 - 1)^{n(n-2)}]_{-1}^{+1} +$$

$$+ k(k-1) \int_{-1}^1 t^{k-2} [(t^2 - 1)^{n(n-2)}] dt = \dots$$

$$\dots = \pm k! \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^{n(n-k)}] dt = \pm k! [(t^2 - 1)^{n(n-k-1)}]_{-1}^{+1} = 0,$$

وهو المطلوب.

من اللائق للحسابات ان نعوض التوابع المتعامدة المحصل عليها بتوابع متناسبة تساوي 1 من اجل $t = 1$. لهذا الغرض، نضع في (1):

$$(3) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^{2n} n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

تسمى كثيرات حدود لوجندر بصفة خاصة:

$$P_0(t) \equiv 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right), \quad P_3(t) = \frac{5}{2} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right), \dots$$

36. 14. نبحث عن نظم كثير الحدود لوجندر $P_n(t)$. لدينا:

$$\begin{aligned} (P_n, P_n) &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n)} [(t^2 - 1)^n]^{(n)} dt = \\ &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} [(t^2 - 1)^n]^{(n)} [(t^2 - 1)^{n(n-1)}] \Big|_{-1}^1 - \\ &\quad - \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n+1)} [(t^2 - 1)^{n(n-1)}] dt. \end{aligned}$$

ينعدم الحد الوارد بدون تكامل حسب التوطئة. بمواصلة المكاملة بالتجزئة حتى تصبح رتبة الاشتقاق في العامل الثاني الواقع تحت رمز المكاملة منعدمة

$$(P_n, P_n) = \frac{(-1)^n}{[2^{2n} (n!)^2]} \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(2n)} (t^2 - 1)^n dt =$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (t-1)^n (t+1)^n dt.$$

نكامل مرة اخرى بالنجزة لتخفيض اس $t-1$:

$$(P_n, P_n) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left[(t-1)^n \frac{(t+1)^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 - n \int_{-1}^1 (t-1)^{n-1} \frac{(t+1)^{n+1}}{n+1} dt \right] =$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)! (-1)^n n!}{2^{2n} (n!)^2 (n+1) \dots 2n} \int_{-1}^1 (t+1)^{2n} dt = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(t+1)^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{2n+1}.$$

اخيرا لدينا:

$$(1) \quad \| P_n \| = \sqrt{(P_n, P_n)} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

14. 46. النشور وفق كثيرات حدود لوجندر. يمكن ان نصل كل تابع

$f(t) \in H(-1, 1)$ بسلسلة فوريى - لوجندر خاصة بهذا التابع:

$$1) \quad f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n P_n(t).$$

طبقاً لـ 71. 14 فإن المعاملات γ_n (معاملات فوريى - لوجندر) تحسب

$$\text{بواسطة الدساتير:} \quad \gamma_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt.$$

نبين كما هو الحال في 42. 14 بخصوص سلاسل فوريى التقليدية، ان سلسلة فوريى - لوجندر (1) متقاربة نحو $f(t)$ بمفهوم المتوسط التربيعي:

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^n \gamma_k P_k(t) \right\|^2 = \int_{-1}^1 \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \gamma_k P_k(t) \right|^2 dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

وهذا عندما يؤول n الى $+\infty$.

لدينا مساواة بارسفال:

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt = \sum_0^{\infty} \frac{2}{2n+1} |\gamma_n|^2.$$

14. 56* نورد نصوص النظريات الخاصة بتقارب سلسلة فوريى - لوجندر عند النقاط المنعزلة، وبالتقارب المنتظم المماثلة للنظريات الواردة في

§ 3. 14.

يكتب المجموع الجزئي لسلسلة فوريى - لوجندر على الشكل:

$$\begin{aligned} s_n(t) &\equiv \sum_0^n \gamma_k P_k(t) = \sum_0^n \frac{(2k+1) P_k(t)}{2} \int_{-1}^1 f(\tau) P_k(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-1}^1 f(\tau) \sum_0^n (2k+1) \frac{P_k(\tau) P_k(t)}{2} d\tau. \end{aligned}$$

$$L_n(t, \tau) = \sum_0^n \frac{P_k(\tau) P_k(t)}{2} (2k+1) \quad \text{يسمى التابع:}$$

نواة فوريى - لوجندر. يمكن اجراء عملية الجمع صراحة؛ تسمى نتيجة هذه العملية متطابقة كريستوفل - داربو (Christoffel-Darbou) (راجع

التمرين 11):

$$L_n(t, \tau) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(\tau) P_n(t) - P_n(\tau) P_{n+1}(t)}{t - \tau}$$

بمعالجة نواة فوريي - لوجندر كما عالجنا نواة ديركليت نستطيع البرهان على النظرية التالية: إذا كان تابع $f(t) \in H(-1, 1)$ مستمرا عند

$$f'(t_0 + 0), \text{ و } f'(t_0 - 0) \text{ مشتقين } t = t_0 \in (-1, 1)$$

منتهيين فإن سلسلة فوريي لوجندر 46.14 (1) متقاربة عند النقطة t_0 نحو القيمة $f(t_0)$. إن هذا التقارب منتظم على كل مجموعة

$$E \subset [-1 + \delta, 1 - \delta] \text{ حيث } f'(t_0 + 0) \text{ و } f'(t_0 - 0) \text{ محدودان تتقارب}$$

السلسلة 46.14 (1) نحو $[f(t_0 + 0), f(t_0 - 0)]$ عند كل نقطة تقطع من النمط الاول $(f(t_0 - 0))$ و $[f(t_0 + 0)]$ محدودان.

نجد برهانا على هذه النظرية في (24).

66.14. كمثال تطبيقي لكثيرات حدود لوجندر في الفيزياء الرياضية نشير الى المسألة التالية (راجع 94.14 - ب). نريد حل معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

في الكرة $r \equiv x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ بحيث ياخذ التابع u على حافة الكرة، اي من اجل $r = 1$ ، القيم المعطاة $u = f(\theta)$ التي لا تتعلق إلا بالزاوية θ التي يشكلها الشعاع $\{x, y, z\}$ ومحور العناصر z . لانشاء الحل نقوم بما يلي: بعد نشر التابع $f(\theta)$ وفق كثيرات حدود لوجندر حسب

التابع $\cos \theta$:

$$f(\theta) = \sum_0^{\infty} \gamma_n P_n(\cos \theta).$$

نحصل على التابع المطلوب $u = u(r, \theta)$ حسب الدستور*:

$$u(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \gamma_n r^n P_n(\cos \theta).$$

76.14. جل متعامدة اخرى. نجد في الفيزياء الرياضية جلا متعامدة كثيرة. نشير هنا الى اكثرها استعمالا. نحصل على كل هذه الجمل بنفس الكيفية: نعتبر على مجال $-\infty \leq a \leq x \leq b \leq +\infty$ تابعا $p(x)$ غير سالب («تابع ثقل») يستخدم لإنشاء الفضاء التابعي $H_{p(x)}[a, b]$ المزود

* راجع مثلا [26].

بالجداء السلمي :

$$(f, g)_{p(x)} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} p(x) dx$$

ثم نطبق على التتابع $1, x, x^2, \dots$ طريقة المعامدة الوارد وصفها العام في 16. 14 .

أ من اجل $a = -1, b = 1, p(x) \equiv 1$ ، نحصل بطبيعة الحال على كثيرات حدود لوجندر .

ب . من اجل $a = -1, b = 1, p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ نحصل على كثيرات حدود تشبيتشاف (Tchébychev) :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);$$

تتحول كثيرات الحدود هذه الى التتابع $\cos nt$ عندما نضع $x = \cos t$ ، ويصبح حينئذ الفضاء $H_{p(x)}(-1, 1)$ متشاكل مع الفضاء $H_1(0, \pi)$.

ج . من اجل $a = 0, b = 1, p(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$ نحصل على كثيرات حدود جاكوبي (كثيرات حدود فوق هندسية)

د . من اجل $a = -\infty, b = \infty, p(x) = e^{-x^2}$ ، نحصل على كثيرات حدود هيرميت (Hermite)

$$H_n(x) = C_n e^{x^2} [e^{-x^2}]^{(n)}.$$

ر . من اجل $a = 0, b = \infty, p(x) = e^{-x}$ ، نحصل على كثيرات حدود لاغير (Laguerre) :

$$L_n(x) = C_n e^x [x^n e^{-x}]^{(n)}.$$

تلجأ الفيزياء الرياضية وبصفة خاصة مسائل التذبذب، ايضا الى العديد من الجمل المتعامدة المؤلفة من توابع مصعدة (او المسامية) (راجع « 22 »). يجد القارى عرضا لجمل التوابع المتعامدة في [25] و [19] .

تمارين

1. بنشر التابع الفردي المساوي لـ $\pi/4$ في $0 < x < \pi$ ، حسب سلسلة فوريي، احصل على علاقات اولر التالية:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

2. بنشر التابع الزوجي المساوي لـ x في $0 < x < \pi$ ، حسب سلسلة فوريي احصل على علاقتي اولر التاليتين:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

3. اوجد مجموع كل من السلسلتين:

$$1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{1.2} + \dots + \frac{\cos nx}{n!} + \dots \quad (أ)$$

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1.2} + \dots + \frac{\sin nx}{n!} + \dots \quad (ب)$$

4. إذا شكلت المجاميع الجزئية لسلسلة فوريي في الفضاء $C(-\pi, \pi)$ ، مجموعة شبه متراسة (39.3 - أ) فإن سلسلة فوريي متقاربة بانتظام.

5. برهن على تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي عند نقطة بجوارها يكون التابع $f(x)$ المنشور تابعا رتيبياً.

6. (تتمة). برهن على ان المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي تابع $f(t)$ متقاربة بانتظام على كل مجال داخل مجال يكون فيه التابع $f(t)$ مستمرا ورتيبياً.

7. نفرض أن تابعا $f(t)$ يحقق الشروط التالية:

$$f(-t) = f(t), \quad f(0) = 0, \quad f(\pi - t) = f(t), \quad f'(t)f(t + 2\pi) = f(t); \quad (1)$$

$$f(t) \text{ مستمر.} \quad (2)$$

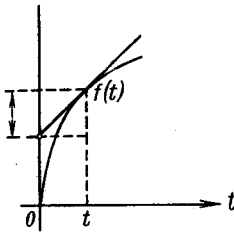
$$f'(t) \text{ مستمر وغير متزايد من اجل } 0 < t \leq \pi/2; \quad (3)$$

4. $\lim_{t \searrow 0} t \frac{f'(t)}{f(t)} = 0$ ؛ اي ان قطعة المستقيم المعينة بالمماس للمنحنى $y = f(t)$ على محور الترتيب تكافئ ، من اجل $t \searrow 0$ ، احدائية التماس (الرسم 7.14)

اثبت ان المعاملات b_n في سلسلة فوريى التابع $f(t)$

$$\sum_1^{\infty} b_n \sin nt$$

لها الشكل : $b_n = 0$ من اجل n زوجي ؛ $b_n = \frac{\theta_n}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + \varepsilon_n$ من اجل n فردي حيث $\theta_n \rightarrow 4/\pi$ و $\sum_1^{\infty} |\varepsilon_n| < \infty$.



الرسم 7.14

8. باستعمال حل التمرين 7 ، اعط مثالا لتابع مستمر له سلسلة فوريى متقاربة بانتظام على $[-\pi, \pi]$ وسلسلة معاملات فوريى غير متقاربة مطلقاً.

9. باستعمال حل التمرين 7 ، اعط تابع $f(t)$ له سلسلة فوريى :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

متقاربة بانتظام على $[-\pi, \pi]$ في حين تكون لكل من السلسلتين

$$\sum_0^{\infty} c_n e^{int}, \quad \sum_{-\infty}^0 c_n e^{int}$$

نقاط تباعد.

10. ليكن $p(x)$ تابع ثقل (76.14) و :

$$Q_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + \gamma_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \dots + \gamma_0^{(n)}$$

متتالية كثيرات الحدود المتعامدة والمتجانسة الموافقة له. برهن على دستور

التدريج :

$$(1) \quad xQ_n(x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} Q_{n+1}(x) + \frac{\beta_n - \beta_{n+1}}{\alpha_n} Q_n(x) + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} Q_{n-1}(x).$$

11 . (تتمة) اثبت مطابقة كريستوفل - داربو :

$$\sum_{k=0}^n Q_k(x) Q_k(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{Q_n(x) Q_{n+1}(t) - Q_n(t) Q_{n+1}(x)}{t-x}.$$

12 . (تتمة) برهن على انه كثير الحدود $Q_n(t)$ ($n > 1$) يقبل n جذرا

في المجال $[a, b]$.

نبذة تاريخية

اثناء النقاش حول الوتر المتذبذب في السنوات 1750 بين اولر ودالمبير الذي تمحور حول تعريف التابع - هل هو عبارة تحليلية (دالمبير) أو منحني يرسم بطريقة اختيارية (أولر)؟ - عولجت من بين الافكار المطروحة فكرة د. بادنولي التي تقول انه من الممكن تمثيل اي منحني معطى على المجال $[0, 2\pi]$ بسلسلة توابع الجيب وجيب التمام. كانت لكل من اولر ودالمبير اسبابا جعلتها ينكران هذه الامكانية، اما بادنولي فلم يتمكن من تعيين معاملات سلسلته لم يبيث في هذه المسألة الا سنة 1805 عندما قدم فوريى دساتير «معاملات فوريى» (12.14 - أ)

احدث اكتشاف فوريى اثر عظيم وبقي هذا الاكتشاف خلال القرن 19، معتبرا من كبريات نظريات التحليل على الرغم من انه حصل عليه بمكاملة بسيطة، جداً جداً، لسلسلة مثلثية كتبت شكليا وضربت في تابع مثلثي معطى. لم يستطع فوريى البرهان على تقارب السلسلة نحو التابع المنشور نظرا لفقدانه التعاريف المتينة للتقارب والتكامل. قام بذلك ديركليت سنة 1829 بالاعتماد على التعاريف المتينة (كوشى، 1821) وهذا في حالة التوابع الرتيبة بتقطع. صيغ «شرط دينى» من طرف دينى سنة 1880. أول من وجد مثالا لتباعد سلسلة فوريى تابع مستمر هو دي بوا - ديمون (1879). ادخلت «كثيرات حدود لوجندر» من طرف لوجندر سنة 1785 لحل معادلة لابلاس ضمن الاحداثيات الكروية. ورغم ذلك فلم يتوصل الى الدستور الصريح 26.14 (3) الا دودريغاس سنة 1815. وجد نومان (1862) النشر وفق كثيرات حدود لوجندر للتوابع التحليلية ووجد هوبسن Hobson (1908) هذا النشر في الحالة العامة. اصبح من الممكن بفضل اعمال هيلبرت (1906 - 1911) هندسة نظرية النشر المتعامدة.

تحويل فوري

أرفض غذائي لا لسبب سوى لأني لا
اعلم بالضبط كيف تم عملية الهضم؟
اليفر هيفسايد

Oliver Heaviside

§ 1. 15 . تكامل فوري ومقلوبه

11. 15. عندما نريد تمثيل تابع $\varphi(x)$ دوري دورته 2π كترابك
توافقيات فإننا نتجه نحو سلسلة فوري:

$$(1) \quad \varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

اما اذا تعلق الامر بتابع دورته $2\pi l$ فإن سلسلة فوري المنسوبة له تأخذ
الشكل:

$$(2) \quad \varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in \frac{x}{l}}$$

حيث تعين المعاملات a_n بواسطة الدستور:

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} \varphi(\xi) e^{-in \frac{\xi}{l}} d\xi.$$

فحصل على الدستور (3) بضرب (2) في $e^{-in \frac{x}{l}}$ وبالمكاملة بالنسبة لـ
 x من $-\pi l$ الى πl .

ينتج من (2) و (3) ان:

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-\pi l}^{\pi l} \varphi(\xi) e^{\frac{in}{l}(x-\xi)} d\xi.$$

من الطبيعي ان نحاول اجراء الانتقال الى النهاية $l \rightarrow \infty$ في الدستور
(4) وذلك كي نمثل، إن امكن، كل تابع $\varphi(x)$ معرف على المحور

$-\infty < x < \infty$ باكملة كترابك توافقيات. إن الانتقال الشكلي الى النهاية يؤدي بنا الى الدستور:

$$(5) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\}$$

حيث يرمز σ للمتغير المستمر الذي نحصل عليه مكان المتغير المتقطع $\sigma_n = n/l$. وبالتالي فإن الدستور المطلوب لنشر تابع $\varphi(x)$ وفق التوافقيات يجب ان يكون من الشكل:

$$(6) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma$$

$$(7) \quad \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi \quad \text{حيث:}$$

كنا أيضا الدستور (7) في الفصل الخاص بالتكاملات الموسعة (23.11)؛ نذكر ان التابع $\psi(\sigma)$ المعرف بالدستور (7) يسمى محولة فوريي أو تكامل فوريي للتابع $\varphi(x)$. يسمى الدستور (6) دستور القلب لفوريي؛ نقول أيضا ان (6) يعرف التحويل المقلوب لفوريي. لا يختلف التحويل (6) في الواقع عن التحويل (7) إلا بإشارة الاس وبالمعامل $1/(2\pi)$.

21.15. بدل اثبات شرعية الانتقال الى النهاية في الدستور 11.15 (5)، سنبين مباشرة ان 11.15 (7) يستلزم 11.15 (5)، وهذا ضمن بعض الشروط على التابع $\varphi(x)$.

نفرض في البداية ان التابع $\varphi(x)$ مستمر بتقطع وقابل للمكاملة مطلقا على كل المحور $-\infty < x < \infty$. من شان ذلك ان يضمن وجود التكامل 11.15 (7) من اجل كل تابع لـ σ حيث $-\infty < \sigma < \infty$. هذه اول نتيجة للفرض المعتبر: إن التابع $\psi(\sigma)$ محدود ومستمر من اجل كل σ ويؤول الى الصفر عندما $\infty \rightarrow |\sigma|$. تأتي المقولة الاولى من

$$|\psi(\sigma)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)| d\xi$$

التقدير:

إن قابلية المكاملة المطلقة للتابع $\varphi(x)$ يستلزم التقارب المنتظم بالنسبة للوسيط $\sigma \in (-\infty, \infty)$ لتكامل فوريي 11.15 (7) حسب المقياس 74.11 أ. بمراعاة النظرية 34.11 واستمرار التابع $e^{i\sigma\xi}$ ينتج استمرار التابع $\psi(\sigma)$. للبرهان على المقولة الثالثة نبحث من اجل $0 < \varepsilon$ معطى، عن

$$\text{عدد } A \text{ بحيث: } \int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi)| d\xi + \int_A^{\infty} |\varphi(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

نطبق الآن التوطئة 23.14 على المجال $[-A, A]$ ؛ سنرى انه يوجد σ_0 بحيث يكون لدينا، من اجل $|\sigma| < \sigma_0$ ،

$$\left| \int_{-A}^A \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي لدينا من اجل $|\sigma| < \sigma_0$:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi)| d\xi + \left| \int_{-A}^A \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi \right| + \int_A^{\infty} |\varphi(\xi)| d\xi < \varepsilon$$

وهو المطلوب.

31.15. قبل البرهان على الدستور 11.15 (5) نعتبر تكاملا موسعا خاصا من النمط الثالث:

$$I_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt \quad (p, q > 0).$$

إن التابع الواقع تحت رمز المكاملة مستمر على المستقيم الحقيقي باكملة (نجد بسهولة القيمة $i(p+q)$ كنهاية عند $t=0$). ينتج تقارب التكامل I_{pq} من 71.11 - ب. لنحسبه. لدينا:

$$\begin{aligned} I_{pq} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\cos qt - \cos pt}{t} + i \frac{\sin qt}{t} + i \frac{\sin pt}{t} \right\} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos qt - \cos pt}{t} dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qt}{t} dt + \\ &+ i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin pt}{t} dt \equiv 2\pi i. \end{aligned}$$

التكامل الاول منعدم بسبب فردية التابع الواقع تحت التكامل اما الثاني

والثالث فقد استعملنا فيها الدستور 11.33 (1). بطريقة ماثلة، لدينا:

$$\int_{-T}^T \frac{e^{igt} - e^{-ipt}}{t} dt = i \int_{-T}^T \frac{\sin qt}{t} dt + i \int_{-T}^T \frac{\sin pt}{t} dt$$

بما ان التكامل الموسع

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt$$

متقاربة بانتظام بالنسبة للوسيط $0 < \alpha_0 \leq \alpha$ (11.94 - ب)، يمكننا ايجاد من اجل كل $0 < \varepsilon$ عدد T_0 بحيث يكون من اجل كل $1 \leq p$ ، $T_0 \leq T$ ، $1 \leq q$:

$$(2) \quad \left| \int_{|t| \geq T} \frac{e^{igt} - e^{-ipt}}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

41.15. ننتقل للبرهان على الدستور 11.15 (5) ونبدأ بصياغة القضية التالية صياغة دقيقة:

نظرية. ليكن $\varphi(x)$ تابعا مستمرا بتقطع، قابلا للمكاملة على المستقيم $-\infty < x < \infty$ ويحقق، من اجل عنصر x ، شرط ديني: اي يوجد $0 < \delta$ بحيث:

$$\int_{|t| \leq \delta} \left| \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} \right| dt < \infty$$

عندئذ يكون لدينا:

$$(1) \quad \varphi(x) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=-p}^q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma$$

بحيث ان النهاية في الطرف الايمن موجودة عندما يؤول p و q نحو اللانهاية باستقلال عن بعضهما البعض.

البرهان. من اجل $0 < p$ ، $0 < q$ كيفيين، نضع:

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=-p}^q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma.$$

ان التكامل الواقع بين حاضنتين متقارب بانتظام بالنسبة لـ σ ويمكننا تغيير

ترتيب التكاملين بالنسبة لـ σ و ξ حسب 44.11 :

$$\begin{aligned} \varphi_{p,q}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \int_{-p}^q e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right\} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{e^{iq(x-\xi)} - e^{-ip(x-\xi)}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt \end{aligned}$$

يُجري التحويل الاخير بواسطة التعويض $x - \xi = t$. يمكننا بفضل
31.15 (1) الاشارة للفرق $\varphi_{p,q}(x) - \varphi(x)$ كما يلي :

$$(2) \quad \varphi_{p,q}(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt.$$

نقسم هذا التكامل الى جزئين :

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \leq T} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \geq T} \quad (T \geq 1).$$

يكتب الحد الثاني على الشكل :

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \geq T} \varphi(x+t) \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt - \frac{\varphi(x)}{2\pi i} \int_{|t| \geq T} \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt.$$

بما ان $\varphi(x+t)$ يقبل المكاملة بصفته تابعا لـ t وان العامل
 $\frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t}$ لا يتجاوز بالطويلة العدد 2 من اجل $|t| \geq T \geq 1$.

فاننا نرى ان الحد الاول للفرق (4) يؤول الى الصفر لما $T \rightarrow \infty$ ،
باستقلال عن قيم p و q الاكبر مثلا ، من 1 . يتمتع الحد الثاني لـ (4)
بنفس الخاصية بفضل 31.15 (2) .

نكتب الحد الاول في (3) على الشكل :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \leq T} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} (e^{iqt} - e^{-ipt}) dt.$$

لما كان التابع $\frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t}$ قابلا للمكاملة مطلقا على المجال
 $|t| \leq T$ (شرط ديني !) فان هذا الحد يؤول الى الصفر حسب التوطئة
23.14 لما يتزايد p و q ، ومنه :

$$(5) \quad \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \varphi_{p,q}(x) = \varphi(x)$$

وهو المطلوب .

يثبت هذا البرهان أيضا التقارب المنتظم للتكامل (1) بالنسبة للوسيط x الذي يرسم مجموعة محدودة E من المستقيم $-\infty < x < \infty$ وذلك عندما يتحقق شرط ديني بانتظام على هذه المجموعة (53.14)؛ ثبت ذلك أيضا مع النظرية المماثلة لها الخاصة بسلاسل فورييه.

51.15. إذا لم يتحقق شرط ديني عند نقطة x_0 فإن النظرية 41.15 لا تصح، ويمكن أن يكون تكامل فورييه للتابع $\varphi(x)$ متباعد كما هو الحال في سلاسل فورييه، فإن العلاقة:

$$\varphi(x_0) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \varphi_{p,q}(x_0) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma$$

لا يمكن أن تتحقق إلا بمفهوم النهاية المعممة. نعتبر في البداية «التكامل الجزئي» المتناظر

$$\varphi_{p,p}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma$$

نرمز لها في المستقبل بـ $\varphi_p(x)$. انطلاقا من 41.15 (2) لدينا من أجل $\varphi_p(x)$ التمثيل التالي:

$$(1) \quad \varphi_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{e^{ipt} - e^{-ipt}}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{\sin pt}{t} dt.$$

لدينا نظرية برهانها مماثل تماما برهان النظرية 83.14، وهي:

نظرية. لتكن x_0 نقطة تقطع من النمط الأول للتابع $\varphi(x)$ ، بحيث توجد النهايتان $\varphi(x_0 - 0)$ و $\varphi(x_0 + 0)$. إذا كان شرطا ديني الوحيدتا الجانب محققين، أي إذا تقارب التكاملان:

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0+0)}{x} \right| dx, \quad \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0-0)}{x} \right| dx$$

من أجل $0 < \delta$ ، فإن لدينا: $\varphi(x_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(x_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma$.

61.15. ندرس الآن المتوسطات الحسابية لتكامل فورييه كما فعلنا ذلك في 25.14 بخصوص سلسلة فورييه، وذلك بدون افتراض صحة شرط

دينى. بدل المتوسط الحسابي للمجاميع المتناظرة لسلسلة فوريى نعتبر، بصفة طبيعية، المتوسط التكاملي للتكاملات المتناظرة $\varphi_p(x)$ (51.15):

$$(1) \quad \sigma_N(x) = \frac{1}{N} \int_0^N \varphi_v(x) dv.$$

نستبدل $\varphi_v(x)$ بقيمتها الواردة في 51.15 (1) فنجد:

$$\begin{aligned} \sigma_N(x) &= \frac{1}{\pi N} \int_0^N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{\sin vt}{t} dt \right\} dv = \\ &= \frac{1}{\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t} \left\{ \int_0^N \sin vt dv \right\} dt = \frac{1}{\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t} \frac{1 - \cos Nt}{t} dt = \\ &= \frac{2}{\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{\sin^2 \frac{N}{2} t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

تسمى العبارة

$$(2) \quad F_N(t) = \frac{2}{\pi N} \frac{\sin^2 \frac{N}{2} t}{t^2}$$

نواة فيجر Fejér لتكامل فوريى. تتمتع نواة فيجر بالخصائص التالية:

$$0 \leq F_N(t) \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_N(t) dt = 1 \quad (2)$$

$$0 < \delta \quad \text{لما} \quad N \rightarrow \infty \quad \int_{|t| \geq \delta} F_N(t) dt \rightarrow 0 \quad (3)$$

تأتي المتراجحة (1) مباشرة. ثم البرهان على المساواة (2) في 94.11 - ب.

$$\int_{|t| \geq \delta} F_N(t) dt \leq \frac{2}{\pi N} \int_{|t| \geq \delta} \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi N \delta}.$$

تستلزم المساواة (2) العلاقة:

$$(3) \quad \sigma_N(x) - \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] F_N(t) dt.$$

نثبت فيما يلي النظرية:

نظرية. اذا كان تابع $\varphi(x)$ قابلاً للمكاملة مطلقاً وكان مستمراً بانتظام

على مجموعة $E \supseteq R_1^*$ ، فإن المتوسطات الحسابية $\sigma_N(x)$ تكامل فوريى

(*) تعنى الخاصية الاخيرة اننا نستطيع، من اجل كل $\epsilon < 5$ ، إيجاد $\delta < 5$ بحيث تستلزم العلاقة Hk6 المتراجحة التالية:

$$|Q(x+1) - Q(x)| < \epsilon$$

وهذا مهما كان $E \ni x$ و $R_1 \ni t$. نشير ان النقطة $x+t$ لا تنتمي بالضرورة للمجموعة E في هذا التعريف.

للتابع $\varphi(x)$ متقاربة بانتظام على E نحو $\varphi(x)$.

البرهان. من اجل $0 < \varepsilon$ معطى نبحث عن $0 < \delta$ بحيث ينتج من:

$|\varphi(x+t) - \varphi(x)| < \varepsilon/2$ المتراجحة التالية $E \ni x, |t| < \delta$

بتطبيق الخاصيتين الاولى والثانية لنواة فيجر نحصل على:

$$\begin{aligned} |\sigma_N(x) - \varphi(x)| &\leq \int_{|t| \leq \delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| F_N(t) dt + \\ &+ \int_{|t| \geq \delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| F_N(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_N(t) dt + 2 \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)| \int_{|t| \geq \delta} F_N(t) dt. \end{aligned}$$

إن الحد الاول لا يتجاوز $\varepsilon/2$ من اجل كل N ، ويصبح الحد الثاني اصغر

من $\varepsilon/2$ تماما من اجل N كبير بكفاية، مثلا من اجل $N_0 < N$. في الاخير

نجد من اجل $N_0 < N$

$$|\sigma_N(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

وهذا مهما كان $E \ni x$ ، وهو المطلوب.

71.15. نحصل بالتالي على نظرية وحدانية محولة فوريي:

إذا كانت محولة فوريي $\psi(\sigma)$ تابع $\varphi(x)$ قابل للمكاملة مطلقا

ومستمر بالتقطع على المحور $-\infty < x < \infty$ ، منعدمة من اجل كل σ فإن

$\varphi(x)$ منعدم اينما كان باستثناء محتمل لمجموعة لا تقبل اية نقطة نهاية

منتھية على محور العناصر x .

ذلك ان لدينا: $\psi(\sigma) \equiv 0$ ، $\varphi_v(x) \equiv 0$ ، $\sigma_N(x) \equiv 0$ اذن:

$$\varphi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) \equiv 0$$

التابع $\varphi(x)$ ، ثم إن نقاط تقطع التابع $\varphi(x)$ تشكل مجموعة منتھية، على

الاكثر، في كل مجال منته من محور العناصر x ، وهو المطلوب في النظرية.

§ 2.15. خاصيات اخرى لتكامل فوريي

نرمز فيما يلي بـ F لمؤثر فوريي: $F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx$.

نرمز لمقلوب تكامل فوري بـ F^{-1} :

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma$$

12. 15 . العلاقة بين سلوك تابع $\varphi(x)$ لما $|x| \rightarrow \infty$ وقابلية اشتقاق محولة فوري .

نعلم ان محولة فوري $\psi(\sigma)$ تابع $\varphi(x)$ قابل للمكاملة مطلقا تابع محدود ومستمر لـ σ ، $-\infty < \sigma < \infty$ - يؤول الى الصفر لما $|\sigma| \rightarrow \infty$. نفرض الآن ان $\varphi(x)$ وكذلك $x\varphi(x)$ يقبلان المكاملة مطلقا على المحور $-\infty < x < \infty$. يمكننا عندئذ القول ان التابع $\psi(\sigma)$ قابل للاشتقاق ، اذ ان الاشتقاق الشكلي بالنسبة للوسيط σ لتكامل فوري :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx = \psi(\sigma)$$

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) e^{-i\sigma x} dx \quad \text{يعطي التكامل :}$$

المتقارب مطلقا وبانتظام بالنسبة لـ σ بفضل النظرية 54. 11 - أ
فإن التابع $\psi(\sigma)$ يقبل الاشتقاق ولدينا :

$$\psi'(\sigma) = -i \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) e^{-i\sigma x} dx.$$

نصل بذلك الى الدستور البين :

$$iF'[\varphi] = F[x\varphi]$$

الذي يبين أن عملية الضرب في x تحول بواسطة مؤثر فوري الى العملية $i \frac{d}{d\sigma}$. إن التابع $\psi'(\sigma)$ هو دوما مستمر ومحدود ويؤول الى الصفر من اجل $|\sigma| \rightarrow \infty$ بصفته محولة فوري لتابع يقبل المكاملة مطلقاً . اذا كانت التوابع :

$$x\varphi(x), x^2\varphi(x), \dots, x^m\varphi(x)$$

مطلقا على المحور $-\infty < x < \infty$ وكذا التابع $\varphi(x)$ فإننا

نستطيع مواصلة الاشتقاق، سنرى ان التابع $\psi(\sigma) = F[\varphi]$ يقبل مشتقات متوالية، بما فيها المشتق من الرتبة m ، مستمرة ومحدودة وتؤول الى الصفر لما $|\sigma| \rightarrow \infty$ ؛ لدينا الدستور:

$$i^k F^{(k)}[\varphi] = F[x^k \varphi] \quad (k=0, 1, \dots, m).$$

اذا كانت كل الجداءات $x^m \varphi(x)$ قابلة للمكاملة مطلقا ($m=0, 1, \dots$) فإن التابع $\psi(\sigma) = F[\varphi]$ يقبل مشتقات (بالنسبة لـ σ) من كل الرتب، مع العلم ان كل مشتق مستمر ويؤول الى الصفر لما $|\sigma| \rightarrow \infty$.

نرى اذن انه بقدر ما يكون تناقص التابع $\varphi(x)$ بجوار اللانهاية سريعا بقدر ما يكون التابع $\psi(\sigma)$ مرنا.

22. 15. لير كيف تتحسن خاصيات اشتقاق التابع $\psi(\sigma)$ عندما نفرض شروطا اضافية على سلوك التابع $\varphi(x)$ عند اللانهاية.

أ. نفرض ان الجداء $\varphi(x) e^{b|x|}$ ، مع ثابت مثبت $b > 0$ ، هو الذي يقبل المكاملة. عندئذ نستطيع القول ان محولة فورييه $\psi(\sigma)$ التابع $\varphi(x)$ تابع لا يقبل الاشتقاق لانهاية فحسب بل هو تحليلي ايضا. ذلك ان تكامل فورييه:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx$$

معرف الآن ليس فحسب من اجل الاعداد الحقيقية σ بل ايضا من اجل بعض العناصر σ العقديّة: إذا وضعنا $s = \sigma + i\tau$ (σ و τ حقيقيان) فإن:

$$(1) \quad \psi(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} e^{\tau x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-isx} dx$$

والتكامل متقارب من اجل $|\tau| \leq b$ ، اي في كل شريط افقي من المستوى العقدي الذي رمزنا لعناصره بـ s . إن التابع

للمتغير العقدي s ، الذي حصلنا عليه، تابع تحليلي عند كل نقطة داخل الشريط؛ ذلك ان التكامل متقارب بانتظام في جوار للنقطة s (عندما يكون هذا الجوار محتويا في الشريط)، يسمح ذلك بتطبيق النظرية 11. 54 - ب. إن التابع $\psi(s)$ محدود في كل الشريط لأن:

$$|\psi(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{|\tau||x|} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{b|x|} dx.$$

يمكننا القول ان التابع $\psi(s) = \psi(\sigma + i\tau)$ متقارب نحو الصفر بانتظام بالنسبة لـ τ ، $|\tau| \leq b$ ، لما $\sigma \rightarrow \pm \infty$.

لإثبات ذلك يجب التدقيق قليلا في استدالات 15. 21.

بصفة خاصة، بما ان التابع $\bar{\varphi}(x) e^{b|x|}$ يقبل المكاملة مطلقا يمكن ان نختار من اجل $0 < \varepsilon$ معطى، عدداً A بحيث:

$$\int_{-\infty}^{-A} |\varphi(x)| e^{b|x|} dx + \int_A^{\infty} |\varphi(x)| e^{b|x|} dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

نعتبر التكامل:

$$\int_{-A}^A \varphi(x) e^{-isx} dx = \int_{-A}^A \varphi(x) e^{\tau x} e^{-i\sigma x} dx.$$

يتبين من المتراجعة، 14. 23 (5) انه يحقق المتراجعة:

$$(2) \left| \int_{-A}^A \varphi(x) e^{-isx} dx \right| \leq 2A\omega \left[\varphi(x) e^{\tau x}, \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] + N_A M_A \frac{2\pi}{|\sigma|}$$

حيث يرمز $\omega(\psi, \delta)$ لتذبذب التابع $\psi(x)$ على مجالات استمراره ويرمز N_A لعدد تلك المجالات من اجل التابع

$$\varphi(x) \text{ على } [-A, A]$$

$$M_A = \sup_{|x| \leq A} |\varphi(x)| e^{\tau x}.$$

إن الحد الاول في الطرف الايمن من (2) لا يتجاوز، من

اجل $|\tau| \leq b$ ، الكمية (71.5 - د)

$$2A\omega \left[\varphi(x), \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] e^{Ab} + 2A\omega \left[e^{bx}, \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] \max_{|x| \leq A} |\varphi(x)|$$

التي تؤول الى 0 لما $|\sigma| \rightarrow \infty$ وهذا باستقلال عن قيمة τ ،
 $|\tau| \leq b$. نلاحظ ان الامر كذلك . بخصوص الحد الثاني في
 (2) . يمكن اختيار σ_0 بحيث ، من اجل $|\sigma| > \sigma_0$ ،

$$|\tau| \leq b : \left| \int_{-A}^A \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx \right| < \frac{\epsilon}{2} .$$

ينتج من ذلك من اجل $|\sigma| > \sigma_0$ ، كما هو الحال في 21. 15 :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx \right| < \epsilon$$

وهو المطلوب .

ب . نفرض الآن بأن جداء التابع $\varphi(x)$ في e^{bx} يقبل
 الكاملة من اجل كل b . عندئذ يكون التابع $\psi(s)$ معرفا
 وتحليليا في كل شريط $|\tau| \leq b$ اي انه تابع تحليلي صحيح ؛
 يأتي مما رأينا ان هذا التابع الصحيح يبقى محدودا ومتقاربا
 بانتظام نحو الصفر من اجل $\sigma \rightarrow \pm\infty$ في كل شريط $|\tau| \leq b$
 (بجاد من الاعلى متعلق بـ b) .

32. 15 . يمكن اعتبار التوابع $\varphi(x)$ التي تتناقص عند اللانهاية
 بسرعة اكبر من السرعة السابقة ، مثل التوابع التي يكون من
 اجلها الجداء $\varphi(x) e^{M(x)}$ ، حيث يتزايد $M(x)$ بسرعة اكبر
 من سرعة اي تابع خطي . من المستحسن وضع $M(x)$ على
 الشكل :

$$(1) \quad M(x) = \int_0^x \mu(\xi) d\xi \quad (0 \leq x < \infty)$$

حيث $\mu(\xi)$ تابع مستمر متزايد يحقق $\mu(0) = 0$ و
 $\mu(\infty) = \infty$ ؛ من اجل x سالب نضع $M(x) = M(-x)$.

يمكننا في هذه الحالة قصد تقديم خاصيات محولة فوريي التابع
 $\varphi(x)$ استخدام التابع $\Omega(\tau)$ الثنوي بمفهوم يونغ (Young)
 للتابع $M(x)$ ، وهو : الثنوي بمفهوم يونغ للتابع $M(x)$ هو

تعريفا التابع $\Omega(\tau)$ المعرف بالعلاقتين:

$$(2) \quad \Omega(\tau) = \int_0^{\tau} \lambda(t) dt \quad (0 \leq \tau < \infty), \quad \Omega(-\tau) = \Omega(\tau)$$

حيث يرمز $\lambda(t)$ للتابع العكسي لـ $\mu(\xi)$. هناك علاقة تربط التوابع الثنوية بمفهوم يونغ تتمثل في المتراجحة التالية المسماة متراجحة يونغ (16.9 - ط):

$$(3) \quad x\tau \leq M(x) + \Omega(\tau) \quad (x > 0, \tau > 0)$$

نظرية. إذا كان $\varphi(x)$ تابعاً مستمرا بتقطع يجعل التكامل:

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{M(x)} dx$$

منتهياً فإن محولة فوري $\psi(s)$ للتابع $\varphi(x)$ تابع تحليلي صحيح يحقق المتراجحة:

$$(5) \quad |\psi(\sigma + i\tau)| \leq C e^{\Omega(\tau)}$$

البرهان. اما كون $\psi(s)$ تابعا تحليليا صحيحا فينتج من 22.15 - ب ثم لدينا:

$$|\psi(\sigma + i\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i(\sigma + i\tau)x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{M(x)} e^{\tau|x|} e^{-M(x)} dx.$$

نطبق على الاس متراجحة يونغ (3) فنحصل على:

$$|x| |\tau| - M(x) \leq \Omega(\tau)$$

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leq e^{\Omega(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{M(x)} dx = C e^{\Omega(\tau)} \quad \text{ومنه:}$$

وهو ما يثبت النظرية.

إذا اخترنا مثلا تابعا $\varphi(x)$ يحقق الشرط:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{\frac{1}{p}|x|^p} dx < \infty, \quad p > 1.$$

نجد التابع الموافق له $\psi(s)$ يحقق المتراجحة:

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leq C e^{\frac{1}{q}|\tau|^q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

لأن $\frac{1}{q}x^q$ هو التابع الثنوي بمفهوم يونغ لـ $\frac{1}{p}x^p$ (16.9 - ط). نشير الى ان العددين p و q اكبر من 1 لكنهما يتغيران في اتجاهين متعاكسين: عندما يتزايد p يتناقص q ولما $p \rightarrow \infty$ فإن $q \rightarrow 1$.

42. 15 نفرض اخيرا ان الجداء $\varphi(x)$ في كل تابع متزايد لـ $|x|$ يقبل المكاملة. من السهل ان نرى بأن التوابع ذات الحوامل المحدودة $\varphi(x)$ (أي التوابع المنعدمة اينما كان تقريبا خارج مجال $|x| \leq a$) هي وحدها التي تتمتع بهذه الخاصية. لنفرض اذن ان $\varphi(x)$ منعدم من اجل $|x| \geq a$. عندئذ تكون محولة فورى:
$$\psi(s) = \int_{-a}^a \varphi(x) e^{-isx} dx$$

تابعا تحليليا صحيحا لـ s يقبل في مستوى العناصر s المتراجحة التالية:

$$(1) \quad |\psi(\sigma + i\tau)| \leq \int_{-a}^a |\varphi(x)| e^{|\tau||x|} dx \leq C e^{a|\tau|}$$

حيث $C = \int_{-a}^a |\varphi(x)| dx$ ، يسمى تابع تحليلي $\psi(s)$ يحقق المتراجحة (1) تابعا صحيحا من النمط الاسي المنتهي $a \gg$. وهكذا بقدر ما تكون سرعة تناقص $\varphi(x)$ عند اللانهاية كبيرة بقدر ما تكون محولة فورى $\psi(\sigma)$ « مرنة ». بالإنطلاق من التوابع $\psi(\sigma)$ المستمرة مرنا بالتوابع التي تقبل عدة مشتقات ثم القابلة للإشتقاق لانهايا ثم التحليلية في شريط، وفي كل المستوى ووصلنا الى التوابع التحليلية من النمط الاسي المنتهي. لا يمكن ان نجد تابعا يؤول الى الصفر في الاتجاهين على المحور الحقيقي، اكثر « مرونة » من التوابع الاخيرة (لاحظ اننا نعلم ان كل محولة فورى لتابع قابل للمكاملة يتمتع بهذه الخاصية)؟ نعلم انه لا يوجد اي تابع تحليلي صحيح غير منعدم

من نمط اسبي منته ويؤول الى الصفر على محور الفاصلات ويزيد في المستوى بسرعة اقل من سرعة $e^{a|x|}$ من اجل كل $a > 0$ (راجع التمرين 24 من الفصل 10).

52. 15. الآن، وبدل شروط التناقص المتزايد في السرعة، نفرض على التابع $\varphi(x)$ ان يكون مرنا اكثر فاكثر. من حقنا حسب نتائج 12. 15 - 42. 15 ان نتوقع خضوع محولة فوريى تابع $\varphi(x)$ الى شروط تناقض يترزايد اكثر فاكثر.

نفرض ان تابعا قابلا للمكاملة مطلقا $\varphi(x)$ مستمر وقابل لمشتق مستمر بتقطع وقابل للمكاملة ايضا على المحور $-\infty < x < \infty$. ينتج من ذلك بادىء ذي بدء ان التابع:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi$$

له نهاية لما $x \rightarrow \infty$ ، وهذه النهاية منعدمة لأن لولاه لما كان $\varphi(x)$ قابلا للمكاملة. الامر كذلك فيما يخص الحالة . ثم نجد بالمكاملة بالتجزئة:

$$F[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) e^{-ix\sigma} dx = \varphi(x) e^{-ix\sigma} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\sigma} dx$$

يتبين مما سبق أن الحد الاول من اليمين منعدم؛ لدينا المساواة:

$$F[\varphi'] = i\sigma F[\varphi]$$

بعبارة اخرى فإن اشتقاق التابع $\varphi(x)$ يوافق ضرب التابع $\psi(\sigma) = F[\varphi]$ في $i\sigma$. بما ان التابع $F[\varphi'(x)]$ بصفته محولة فوريى تابع قابل للمكاملة، تابع لـ σ محدود (ويؤول نحو الصفر لما $|\sigma| \rightarrow \infty$) فإن لدينا العلاقة التالية بخصوص

$$F[\varphi(x)] : F[\varphi'] = \frac{|F[\varphi'(x)]|}{|\sigma|} \leq \frac{c}{|\sigma|}$$

وهكذا يتضح في هذه الحالة ان التابع $\psi(\sigma)$ لا يؤول الى الصفر لما $|\sigma| \rightarrow \infty$ فحسب بل يؤول بسرعة تفوق سرعة

$1/\sigma$ فإن كانت المشتقات المتوالية، بما فيها المشتق من الرتبة m ، للتابع $\varphi(x)$ قابلة للمكاملة مطلقا فإننا نحصل بمواصلة العملية على:

$$(1) \quad F[\varphi^{(k)}(x)] = (i\sigma)^k F[\varphi] \quad (k=0, 1, \dots, m)$$

لدينا، كما هو الحال اعلاه:

$$(2) \quad F[\varphi] = \frac{|F[\varphi^{(k)}(x)]|}{|\sigma|^k} \leq \frac{c}{|\sigma|^k}$$

إذن بقدر ما يكون للتابع $\varphi(x)$ مشتقات قابلة للمكاملة بقدر ما يكون اسرع التناقص نحو الصفر عند اللانهاية لمحولة فورييه.

بصفة خاصة عندما يكون التابع $\varphi(x)$ مرنا بكفاية فإن محولة فورييه هذا التابع تقبل ايضا المكاملة مطلقا. نرى من (2) ان وجود φ ، φ' ، φ'' وقابليتها للمكاملة المطلقة توفر شرطا كافيا لذلك.

إذا كان $\varphi^{(k)}(x)$ موجودا وقابلا للمكاملة مطلقا من اجل كل $k=0, 1, 2, \dots$ فإن التابع $\varphi(\sigma)$ يتناقص، لما $|\sigma| \rightarrow \infty$ ، بسرعة تفوق سرعة كل تابع $1/|\sigma|^k$.

62. 15. أ. نفرض الآن ان التابع $\varphi(x)$ لا يقبل الاشتقاق لانهايا فحسب بل انه تابع تحليلي في شريط $|y| \leq b$ من المستوى ذي المتغير العقدي $z = x + iy$. نفرض اضافة الى ذلك وجود تابع $\Phi(x)$ بحيث:

$$(1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx < \infty$$

كما نفرض من اجل كل y $|y| \leq b$ ان:

$$(2) \quad |\varphi(x + iy)| \leq \Phi(x)$$

سنرى (في ج) ان محولة فورييه التابع $\Phi(x)$ هو تابع متناقص تناقصاً اسياً.

ب. نبرهن في البداية على التوطئة التالية الخاصة بالتتابع التحليلية:

توطئة. إذا كان تابع $f(z)$ تحليلياً في الشريط $|y| < b$ ، وحقق فيه المتراجحة:

$$(3) \quad |f(x + iy)| \leq \Phi(x)$$

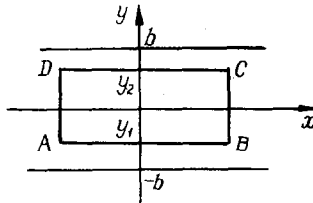
حيث $\Phi(x)$ تابع يحقق الشرطين (1)، فإن التكامل:

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x + iy) dx$$

لا يتعلق بـ y ، $|y| < b$.

البرهان. ينتج وجود التكامل (4) مباشرة من استمرار التابع $f(x + iy)$ بالنسبة لـ x ومن التقديرات (1) و (3) ليكن الآن y_1 و y_2 عددين كئيفيين بحيث $y_1 < y_2$ ، من المجال $(-b, b)$. نعتبر الحافة المغلقة: $L = ABCD$ المبينة في الرسم 1.15. من نظرية كوشي 23.10 لدينا:

$$(5) \quad \int_L f(z) dz = \int_A^B f(z) dz + \int_B^C f(z) dz + \int_C^D f(z) dz + \int_D^A f(z) dz = 0.$$



الرسم 1.15

لتكن R و $-R$ فاصلتين النقطتين A و B . عندئذ:

$$\left| \int_B^C f(z) dz \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f(z)| dz \leq \int_{y_1}^{y_2} \Phi(R) dy = \Phi(R)(y_2 - y_1)$$

تؤول هذه الكمية الى 0 لما $R \rightarrow \infty$ كما هو الحال في التكامل :

$$\int_D^A f(z) dz$$

إن للتكامل المتبقيين نهايتين لما $R \rightarrow \infty$ هو

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_1) dx \quad \text{و} \quad - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_2) dx$$

بالإنتقال في المساواة (5) الى النهاية لما $R \rightarrow \infty$ نحصل على :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_1) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_2) dx$$

وهو المطلوب .

ج . نظرية . باعتبار الفرض أ ، فإن محولة فورييه $\psi(\sigma)$ للتابع

$$\varphi(x) \text{ يحقق المتراجحة } |\psi(\sigma)| \leq C e^{-b|\sigma|}$$

البرهان . نطبق التوطئة ب على التابع التحليلي :

$$f(z) = \varphi(z) e^{-i\sigma z}$$

التي تتحقق من اجلها المتراجحة (3) اذا عوضنا فيها

$$\text{ب : } \Phi(x) e^{\sigma|b|} . \text{ بفضل التوطئة ، نجد :}$$

$$(6) \quad \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy) e^{-i\sigma(x+iy)} dx$$

من اجل كل $b > |y|$. بثبت نحصل على التقدير :

$$|\psi(\sigma)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)| e^{\sigma y} dx = e^{\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)| dx \leq e^{\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx$$

بالإنتقال هنا الى النهاية لما $y \rightarrow -b \operatorname{sgn} \sigma$ نجد :

$$|\psi(\sigma)| \leq C e^{-|\sigma|b}$$

وهو المطلوب .

د . إذا كان التابع $\varphi(x)$ تحليليا في كل المستوى $z = x + iy$ وإذا تمكنا

من الاشارة ، من اجل كل شريط $b < |y|$ ، الى تابع $\Phi(x)$ يحقق

الشروط (1) و (2) (يمكن للتابع $\Phi(x)$ ان يتعلق بـ b) ، فإن تطبيق

النظرية ج يجعلنا نرى ان محولة فوريي $\psi(\sigma)$ التابع $\varphi(x)$ يحقق متراجحة من الشكل:

$$|\psi(\sigma)| \leq C_b e^{-|\sigma|b}$$

من اجل كل b .

72. 15. نعتبر بعد ذلك تابعا تحليليا صحيحا $\varphi(x)$ يقبل في كل شريط $|y| \leq b$ التقدير:

$$|\varphi(x+iy)| \leq e^{\Omega(y)} \Phi_b(x)$$

$$\Omega(y) = \int_0^y \lambda(\eta) d\eta \quad (0 \leq y < \infty), \quad \Omega(-y) = \Omega(y) \quad \text{مع}$$

حيث $\lambda(\eta)$ تابع مستمر ومتزايد يحقق $\lambda(0) = 0$ و $\lambda(\infty) = \infty$. نفرض، من اجل كل b ، ان التابع $\Phi_b(x)$ يحقق الشرطين 62. 15 (1) في الشريط $|y| \leq b$.

ليكن $M(\sigma)$ الثنوي بمفهوم يونغ للتابع $\Omega(y)$:

$$M(\sigma) = \int_0^\infty \mu(\xi) d\xi$$

حيث $\mu(\xi)$ هو التابع العكس لـ $\lambda(\eta)$.

نظرية. ضمن الفرض هذا تكون محولة فوريي $\psi(\sigma)$ للتابع $\varphi(x)$ تحقق المتراجحة:

$$|\psi(\sigma)| \leq C e^{-M(\sigma)}$$

البرهان. لدينا حسب 62. 15 (6):

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy) e^{-i\sigma(x+iy)} dx$$

وهذا من اجل كل y . ينتج من ذلك التقدير $(b > |y|)$:

$$(1) \quad |\psi(\sigma)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Omega(y)} \Phi_b(x) e^{\sigma y} dx = C_b e^{\Omega(y) + \sigma y}$$

نختار اشارة وطويلة y بحيث يكون $\sigma y = -|\sigma| |y|$ وبحيث

تصبح متراجحة يونغ المساواة:

$$|\sigma| |y| = M(\sigma) + \Omega(y)$$

بعد هذا ينتج من (1) ان:

$$|\psi(\sigma)| \leq C_2 e^{-M(\sigma)}$$

بذلك ينتهي البرهان.

82. 15 . ليكن اخيرا $\varphi(x)$ تابعا تحليلياً صحيحا يحقق المتراجحة:

$$|\varphi(x+iy)| \leq \Phi(x) e^{a|y|}$$

حيث يخضع التابع $\Phi(x)$ الى الشرطين 62. 15 (1) (ولا يتعلق بـ y).

نظرية. ضمن الفرض الوارد، تنعدم محولة فوري $\psi(\sigma)$ التابع $\varphi(x)$ من اجل $|\sigma| > a$.

البرهان. لدينا حسب 62. 15 (6):

$$(1) \quad \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy) e^{-i\sigma(x+iy)} dx$$

وهذا من اجل كل y . نثبت اشارة y بحيث يكون

$$|\sigma y| = -|\sigma| |y| \quad (1)$$

$$(2) \quad |\psi(\sigma)| \leq e^{\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{a|y|} dx \leq C e^{(a-|\sigma|)|y|}$$

ليكن $|\sigma| > a$. يجعل $|y|$ يؤول الى ∞ في المتراجحة (2) نحصل

على $\psi(\sigma) = 0$ ، وهو المطلوب.

92. 15 . من الواضح ان النظريات 52. 15 - 82. 15 ليست بالضبط القضايا

العكسية للنظريات 12. 15 - 42. 15، فهي تتطلب فروضا اضافية (مثلا

وجود تابع $\Phi(x)$ يتمتع بالخصائص 62. 15 (1)، (2)). السؤال المطروح

يتعلق بانشاء اصناف توابع $\varphi(x)$ يمكن تعيين اصناف محولاتها لفوري

$\psi(\sigma)$ تعيينا كاملا. نستطيع انشاء بعض هذه الاصناف بواسطة

النظريات 12. 15 - 82. 15.

أ. الصنف S . نعتبر المجموعة S المؤلفة من كل التوابع القابلة للإشتقاق

لانهائيا $\varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$) التي تحقق من اجل كل k و q (حيث

$k, q = 0, 1, 2, \dots$) متراجحة من الشكل:

$$(1) \quad |x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_{kq}$$

حيث C_{kq} ثابت (يتعلق باختيار التابع $\varphi(x)$).

إن كل تابع $x^k \varphi^{(q)}(x)$ محدود على المحور x ويقبل أيضا

المكاملة على كل المحور لأن المتراجحة

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq \frac{C_{k+2, q}}{x^2}$$

قائمة بفضل المتراجحة (1) بحيث ان:

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq \min \left\{ C_{kq}, \frac{C_{k+2, q}}{x^2} \right\} \leq \frac{C_{kq}^*}{1+x^2}$$

حيث C_{kq}^* ثابت جديد.

ثم إن كل تابع $x^k \varphi(x)$ يقبل الاشتقاق لانهايا مع $\varphi(x)$ ، كما ان

كل مشتق له يقبل المكاملة على محور العناصر x لان هذه المشتقات تكتب

على شكل عبارات خطية لتوابع قابلة للمكاملة $x^j \varphi^{(q-j)}(x)$ حسب

دستور ليبينتز 21.8 (3).

إن التابع $\psi(\sigma) = F[\varphi(x)]$ يقبل الاشتقاق لانهايا بفضل

12.15 . باستخدام الدساتير 12.15 (2) و 52.15 (1) يمكن كتابة:

$$F[(x^k \varphi(x))^q] = (-i)^q i^k \sigma^k \psi^{(q)}(\sigma)$$

نلاحظ ان الطرف الثاني هنا، بصفته محولة فوريي تابع قابل للمكاملة

$(x^k \varphi(x))^q$ ، محدود مهما كان k و q :

$$|\sigma^k \psi^{(q)}(\sigma)| \leq B_{kq}$$

إذن إذا كان $S \ni \varphi(x)$ فإن $S \ni \psi(\sigma)$. وبالعكس، ليكن

$S \ni \psi(\sigma)$ ؛ لنثبت ان هذا التابع هو محولة فوريي تابع $S \ni \varphi(x)$. نضع

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma$$

إن التابع $2\pi\varphi(-x)$ هو محولة فوريي التابع $\psi(\sigma)$ ، ولذا ينتمي

الى S . ومنه يتضح ان لدينا ايضا $S \ni \varphi(x)$ حسب دستور القلب:

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\varphi(-x) e^{i\sigma x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx$$

وبالتالي فإن $\psi(\sigma)$ هو محولة فوريي التابع $\varphi(x)$ ، وهو المطلوب.

وهكذا يتبين ان تحويل فوريى F يطبق الصنف S على كل الصنف S
 ب . لتكن m_{kq} ($k, q = 0, 1, 2, \dots$) متتالية مزدوجة من الثوابت .
 يتشكل الصنف $S_{\langle m_{kq} \rangle}$ تعريفاً من كل التوابع القابلة للإشتقاق لانهاياً
 $\varphi(x)$ ($-\infty < x < \infty$) التي تحقق المتراجحات:

$$\|x^k \varphi^{(q)}(x)\| \leq CA^k B^q m_{kq} \quad (k, q = 0, 1, 2, \dots)$$

حيث A, B, C ثوابت يمكن ان تتعلق بالتابع $\varphi(x)$
 يتبين ضمن بعض الشروط المتعلقة بالمتتالية m_{kq} ان لدينا الدستور:

$$F(S_{\langle m_{kq} \rangle}) = S_{\langle m_{kq} \rangle}^*$$

ج . الصنف W_M والصنف W^q . ليكن $M(x)$ و $\Omega(\tau)$ تابعين ثنوين
 بمفهوم يونغ فيما بينها (32.15) . يتشكل الصنف W_M تعريفاً من كل
 التوابع القابلة للإشتقاق لانهاياً ($-\infty < x < \infty$) $\varphi(x)$ التي تحقق
 المتراجحات: ($q = 0, 1, 2, \dots$) $|\varphi^{(q)}(x)| \leq C_q e^{-M(x)}$

إذا كان $\psi(x)$ هو محولة فوريى تابع $\varphi(x)$ فإن $(is)^q \psi(s)$
 محولة فوريى التابع $\varphi^{(q)}(x)$ (52.15) . لدينا بفضل 32.15
 المتراجحات:

$$(2) \quad |s^q \psi(\sigma + i\tau)| \leq C'_q e^{\Omega(\tau)} \quad (q = 0, 1, 2, \dots)$$

نرمز بـ W^q لصنف كل التوابع التحليلية الصحيحة $\psi(s)$ التي تحقق
 المتراجحات (2) . نرى ان $F(W_M) \subset W^q$. ليكن الآن $\psi(s)$ تابعا
 كيفياً من W^q . انطلاقاً من المتراجحة (2) ومن نفس المتراجحة المحصل
 عليها عند تعويض q بـ $q+2$ ، يأتي:

$$|s^q \psi(\sigma + i\tau)| \leq e^{\Omega(\tau)} \min \left\{ C'_q, \frac{C'_{q+2}}{|s|^{q+2}} \right\} = \Phi_{\tau q}(\sigma) e^{\Omega(\tau)}$$

حيث:

$$\Phi_{\tau q}(\sigma) = \min \left\{ C'_q, \frac{C'_{q+2}}{|\sigma + i\tau|^{q+2}} \right\} \leq \frac{C_{\tau q}}{1 + |\sigma|^2}$$

(*) راجع [23]

تابع قابل للمكاملة. يؤدي تطبيق النظرية 72.15 الى المتراجحة:

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq C_n e^{-M(x)}$$

اي ان $F[W^{\infty}] = W_M$. في الاخير نرى ان صورة الصنف W_M بواسطة تحويل فوري هو الصنف W^{∞} وان صورة الصنف W^{∞} هو W_M .

§ 3.15 . امثلة وتطبيقات

نعتبر في البداية، في 13.15 - 23.15 بعض الامثلة في محولات فوري.

13.15 . كنا حسبنا محولة فوري كسر ناطق:

$$Q(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$$

حيث $m < n - 1$ في 23.11 - ب بطريقة المكاملة على طول حافة باستعمال النظرية 62.15 - ج وتحليلية التابع $Q(z)$ في شريط $|y| \leq b$ (لا يحوي جذورا للمقام) يمكننا القول ان $F[Q(x)]$ يتناقض اسياً من اجل $|\sigma| \rightarrow \infty$ ؛ نلاحظ اننا لم نعد في حاجة لذلك ما دمنا قد حسبنا $F[Q(x)]$ بشكل صريح.

23.15 . لنبحث عن محولة فوري $\psi(\sigma)$ تابع $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ ، $a > 0$ ان هذا التابع يقبل التمديد تحليليا في كل المستوى ولدينا التقدير:

$$|e^{-az^2}| = |e^{-a(x+iy)^2}| = e^{ay^2} e^{-ax^2}$$

وبالتالي يمكن الانتقال، بفضل 62.15 - ب، في المستوى ذي العناصر z ، من محور العناصر x الى اي مستقيم مواز له وذلك بغية حساب محولة

$$\begin{aligned} \psi(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\sigma(x+iy)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + ay^2 + \sigma y - 2aixy - i\sigma x} dx = \\ &= e^{ay^2 + \sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ix(2ay + \sigma)} dx. \end{aligned}$$

نضع $y = -\sigma/(2a)$ ؛ عندئذ $ay^2 + \sigma y = -\sigma^2/(4a)$ ولدينا حسب الدستور

$$\psi(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = -e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2) - 65.15$$

بصفة خاصة نحصل من اجل $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ ($a=1/2$) على:

$$\psi(\sigma) = \sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2/2}$$

33. 15. محاولة فورييه وجداء التزويج. كنا عرفنا في 84. 11 جداء تزويج تابعين $f(x)$ و $g(x)$ معرفين على $-\infty < x < \infty$ على انه

$$(1) \quad h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi \quad \text{التابع:}$$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ مستمرين ومحدودين وقابلين للمكاملة مطلقا على $(-\infty, \infty)$ فإن $h(x)$ موجود من اجل كل x ومستمر ايضا ومحدود وقابل للمكاملة مطلقا على $(-\infty, \infty)$ ؛ بالإضافة الى ذلك لدينا:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

نطبق النظرية الخاصة بجداء التزويج بتعويض $f(x)$ و $g(x)$ بـ $f(x) e^{-i\sigma x}$ و $g(x) e^{-i\sigma x}$ على التوالي. إن جداء تزويج هذين

التابعين هو:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\sigma\xi} g(x-\xi) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\xi = e^{-i\sigma x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi$$

تعطي المساواة (2) حينئذ:

$$\begin{aligned} F[f * g] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi \right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\sigma x} dx = F[f] \cdot F[g], \end{aligned}$$

بعبارة اخرى فإن الفروض الواردة اعلاه على التابعين $f(x)$ و

$g(x)$ تستلزم ان محاولة فورييه جداء تزويج $f(x)$ و $g(x)$ هو جداء

محولتين فورييه لهذين التابعين.

43. 15. حل معادلة الحرارة. نبحث عن حل $u(x, t)$ لمعادلة الحرارة

$$:(t \geq 0, -\infty < x < \infty)$$

$$(1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

يطابق التابع المعطى $u_0(x)$ من اجل $t = 0$. يتمثل المعنى الفيزيائي للمسألة المطروحة في تعيين درجة حرارة المحتوى المتجانس الوحيد البعد (لقضيب غير منته) في كل لحظة $t > 0$ اذا علمنا درجة حرارته في اللحظة $t = 0$. نشترط ما يلي :

(1) التتابع $u(x, t)$ ، $u_x(x, t)$ ، $u_{xx}(x, t)$ مستمرة وقابلة للمكاملة مطلقا عند x من اجل $-\infty < x < \infty$ ومن اجل كل $t \geq 0$ مثبت .

(2) يقبل التابع $u_t(x, t)$ في كل مجال $0 \leq t \leq T$ حدا اعلى قابلية للمكاملة

$$|u_t(x, t)| \leq \Phi(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx < \infty$$

نطبق على المعادلة (1) تحويل فوريى بضرها في $e^{-i\sigma x}$ وبالمكاملة بعد ذلك بالنسبة لـ x من $-\infty$ الى ∞ . (بفضل الشرط (2) و 54.11 - أ و 74.11 - أ يمكن كتابة :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-i\sigma x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\sigma x} dx = v_t(\sigma, t)$$

$$v(\sigma, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\sigma x} dx \quad \text{حيث :}$$

هو محولة فوريى الحل المطلوب $u(x, t)$. لدينا من الشرط (1) والدستور 52.15 (1) :

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\sigma^2 F[u] = -\sigma^2 v(\sigma, t)$$

نصل الى المعادلة التفاضلية العادية :

$$v_t(\sigma, t) = -\sigma^2 v(\sigma, t)$$

التي يجب ان نجد خلا لها يطابق ، من اجل $t = 0$:

$$v_0(\sigma) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-i\sigma x} dx$$

من الواضح ان للحل المطلوب الشكل :

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t} v_0(\sigma)$$

علمنا (راجع 23.15 حيث ينبغي وضع $a = 1/(4t)$) ان :

$$e^{-\sigma^2 t} = F \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right]$$

لدينا حسب الدستور الخاص بمحولة فوريى جداء تزويج (33.15 (2)) :

$$v(\sigma, t) = F \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right] F[u_0] = F \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) \right]$$

وبما ان $v(\sigma, t) = F[u(x, t)]$ فإننا نصل الى :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x-\xi) d\xi$$

يسمى الدستور المحصل عليه تكامل بواسون (Poisson). نبين ضمن نظرية المعادلات ذات المشتقات الجزئية ان الحل السابق وحيد في صنف واسع من التواع [11].

§ 4.15 تحويل لابلاس

14.15 . ليكن $\varphi(x)$ تابعا معطى من اجل $-\infty < x < \infty$ مستمرا بتقطع بحيث يكون $e^{-\gamma x} \varphi(x)$ (حيث γ حقيقي) قابلا للمكاملة مطلقا. عندئذ فإن محولة فوريى التابع $\varphi(x)$ التي قد لا تكون موجودة بالمفهوم الاول لهذا المصطلح، يمكن ان تكون موجودة من اجل بعض العناصر s العقدية؛ بصفة خاصة فإن

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-isx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\sigma} e^{\tau x} dx$$

موجودة على المستقيم $\tau = -\gamma$. نرى على هذا المستقيم أن $\psi(s)$ هو محولة فوريى التابع $\varphi(x) e^{\tau x}$ القابل للمكاملة مطلقا.

تتحقق اهم حالة ضمن الشرط :

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} |\varphi(x)| < C e^{\alpha x} \quad \text{pour } x \geq 0, \\ \varphi(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0. \end{array} \right\}$$

نلاحظ ان محولة فوريى هنا :

$$(2) \quad \psi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{\tau x} e^{-ix\sigma} dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-ixs} dx$$

موجودة هنا من اجل $\tau < -\alpha$ أي في نصف المستوى ذي المتغير العقدي $s = \sigma + i\tau$ الواقع تحت المستقيم $\tau = -\alpha$. نجري في الدستور (2) تبديلا للمتغير هو $is = p$. إذا رسم s نصف المستوى $\text{Im } s < -\alpha$ فإن p يرسم نصف المستوى $\text{Re } p > \alpha$. إن التابع:

$$\Phi(p) \equiv \psi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-px} dx$$

معرف وتحليلي في نصف المستوى $\text{Re } p > \alpha$ ؛ نلاحظ ان هذا التابع يؤول الى الصفر على كل مستقيم عمودي من نصف المستوى المعبر عندما $\text{Im } p \rightarrow \pm\infty$ ، بما ان هذا التقارب منتظم على كل مجال مغلق منته من القيم $\text{Re } p$. من جهة اخرى لدينا التقدير التالي في نصف المستوى $\text{Re } p > \alpha$ بخصوص التابع $\Phi(p)$ (حيث $p = \xi + i\eta$):

$$|\Phi(p)| \leq \int_0^{\infty} |\varphi(x)| e^{-\xi x} dx \leq C \int_0^{\infty} e^{(\alpha-\xi)x} dx = \frac{C}{\xi-\alpha}$$

ينتج من ذلك ان التابع $\Phi(p)$ محدود في كل نصف مستوى $\text{Re } p \geq \beta > \alpha$ وانه يؤول الى الصفر لما $\xi \rightarrow \infty$.

يسمى التابع $\Phi(p)$ محولة لابلاس التابع $\varphi(x)$. نرى ان لابلاس لا تختلف عن تحويل فوريي (المعبر في الساحة العقدية) الا بدوران ذي 90° في مستو المتغير العقدي.

24. 15. أ. تقدم النظرية التالية شروطا كافية (لكنها بعيدة عن ان تكون ضرورية) لكي يكون تابع $\Phi(p)$ معطى محولة فوريي تابع $\varphi(x)$ يحقق الشروط 14. 15 (1).

نظرية. ليكن $\Phi(p)$ ، $(p = \xi + i\eta)$ ، تابعا يتمتع بالشرطين التاليين:

- (1) التابع تحليلي في نصف مستو $\text{Re } p > \gamma_0 \geq 0$ ،
- (2) يوجد ثابت C وتابع $B(\eta)$ موجب وقابل للمكاملة على المحور $-\infty < \eta < \infty$ بحيث يكون لدينا التقدير التالي من اجل كل $\xi > \gamma_0$:

$$\left| \Phi(p) - \frac{C}{p} \right| \leq B(\eta)$$

عندئذ يكون $\Phi(p)$ محولة لابلاس تابع $\varphi(x)$ مستمر بتقطع ينعدم من اجل $x < 0$ ، ومستمر من اجل $x > 0$ ويحقق المتراجحة:

$$|\varphi(x)| < C e^{\gamma_0 x}$$

من اجل $x > 0$.

البرهان. من الواضح ان التابع C/p محولة لابلاس التابع $\varphi_0(x)$ المساوي لـ 0 من اجل $x < 0$ ولـ C من اجل $x > 0$. يحقق التابع $\varphi_0(x)$ متطلبات النظرية. يمكن بعد عزل هذا التابع افتراض ان التابع

$\Phi(p)$ نفسه يحقق من اجل $\xi > \gamma_0$ المتراجحة:

$$|\Phi(p)| \leq B(\eta)$$

نعرف في هذه الحالة التابع $\varphi(x)$ بالدستور:

$$(1) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Phi(p) e^{px} dp \quad (\gamma > \gamma_0)$$

باستخدام دستور كوشي (بصفة مماثلة لـ 62.15 - ب) واعتمادا على الشرطين (1 و 2) من اليسير اثبات عدم تعلق التكامل (1) بـ γ . من جهة اخرى، لدينا المتراجحة:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\xi + i\eta)| e^{\gamma x} d\eta \leq \frac{B}{2\pi} e^{\gamma x}$$

عندما يكون $x > 0$ ، نحصل في حالة جعل γ يؤول الى γ_0 على:

$$|\varphi(x)| \leq C e^{\gamma_0 x}$$

اما فيما يخص $x < 0$ فنجعل γ يؤول الى $+\infty$ ، نحصل عندئذ على

$$\varphi(x) \equiv 0$$

إذا وضعنا الدستور (1) على الشكل:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi + i\eta) e^{(\xi+i\eta)x} i d\eta = \frac{e^{\xi x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi + i\eta) e^{i\eta x} d\eta$$

فإننا نرى بان $2\pi\varphi(-x) e^{\xi x}$ محولة فورييه ، بالنسبة للمتغير η ، للتابع القابل للمكاملة مطلقا $\Phi(\xi + i\eta)$ ، (ξ مثبت). من دستور القلب

يأتي:

$$(2) \quad \Phi(\xi + i\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\varphi(-x) e^{(\xi+i\eta)x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-px} dx$$

بحيث ان $\Phi(\xi + i\eta)$ يمثل فعلا محولة لابلاس التابع $\varphi(x)$. يلعب الدستور (1) دورا هاما في نظرية تحويل لابلاس، يسمى هذا الدستور دستور القلب للابلاس.

ب. لزم ما هي الشروط التي ينبغي توفرها في التابع $\varphi(x)$ كي تحقق محولة لابلاس لهذا التابع فرض النظرية أ. لنفرض ان $\varphi(x)$ يقبل الاشتقاق $m-1$ مرة باستمرار ومشتقة ذو الرتبة موجود ومستمر بتقطع بحيث تحقق هذه المشتقات الشرط 14.15 (1). عندئذ عندما نكامل المساواة

(2) مرة بالتجزئة نحصل من اجل ∞ $\xi = \text{Re } p \geq \gamma > \alpha$ على:

$$|\Phi(p)| = \left| \frac{1}{p^m} \int_0^{\infty} \varphi^{(m)}(x) e^{-px} dx \right| \leq \frac{C}{|p|^m} =$$

$$(3) \quad = \frac{C}{|\xi^2 + \eta^2|^{m/2}} \leq \frac{C_1}{(\gamma^2 + \eta^2)^{m/2}}$$

نرى اذن ان فرض النظرية أ محقق اذا كان $m=2$. وبالتالي فإن وجود المشتق الثاني المستمر بتقطع للتابع $\varphi(x)$ يضمن توفر فرض النظرية أ.

34.15. يُساعد تحويل لابلاس في كثير من الاحيان على حل المعادلات التفاضلية العاديا او ذات المشتقات الجزئية الموافقة لجمال غير مستقرة؟ في مثل هذه المسائل فإن التابع المجهول $f(t)$ منعدم من اجل $t < 0$ ، ويحسب، من اجل $t > 0$ ، ان تحقق معادلة وبعض الشروط الابتدائية من اجل $t = 0$.

نعتبر في البداية معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة:

$$(1) \quad a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b(t)$$

$$y(0) = y_0,$$

$$y'(0) = y_1,$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

نستكملها بالقيم المعطاة:

(2)

يحقق التابع $\frac{R_0(p)}{R(p)}$ فرض النظرية 24.15 - أ، خاصة اذا وضعنا

$$C = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pR_0(p)}{R(p)}$$

فإننا نجد ان:

$$\frac{R_0(p)}{R(p)} - \frac{C}{p} = \frac{pR_0(p) - CR(p)}{pR(p)}$$

كسر ناطق لـ p حيث تتجاوز درجة المقام $n + 1$ درجة البسط بوحدتين على الاقل لأن تعريف C يبين ان حدود البسط ذات الدرجة n تزول بالاختصار.

اما فيما يخص التابع $\frac{B(p)}{R(p)}$ فليس من المؤكد انه يحقق فرض النظرية 24.15 - أ؛ لأن ذلك يتوقف عن طبيعة التابع $B(p)$. اذا كانت درجة كثير الحدود $R(p)$ اكبر من 1 يكفي ان يكون التابع $b(t)$ يحقق الشروط 14.15 (1) لأن $B(p)$ محدود؛ وإذا كانت درجة $R(p)$ تساوي 1 فإن المتراجحة 24.15 (3) تثبت انه يكفي ان يقبل التابع مشتقا مستمرا بتقطع يتمتع مع $b(t)$ بالشروط 14.15 (1).

إذا حقق التابع $\frac{B(p)}{R(p)}$ ايضاً فرض النظرية 24.15 - أ فإن تطبيق هذه الاخيرة يؤدي بخصوص الحل $y(t)$ الى الدستور:

$$(4) \quad y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{B(p)-R_0(p)}{R(p)} e^{pt} dp$$

إذا كان التابع $B(p)$ قابلاً للتمديد تحليلاً في كل مستوى العناصر p (مع وجود نقاط شاذة منعزلة) فإننا نحسب عادة التكامل (4) بواسطة المكاملة على طول محيط باستخدام نظرية الرواسب كما فعلنا في حساب تكامل فوري لتتابع كسرية. نلاحظ بخصوص $t > 0$ ان التابع e^{pt} محدود في نصف المستوى الايسر ($\text{Re } p < \gamma$) وهو ليس كذلك في نصف المستوى الآخر؛ يجب اذن انشاء انصاف الدوائر التي تمثل جزءاً من المحيط الواقع على يسار المستقيم $\text{Re } p = \gamma$ وليس على يمينه. يمكن اختيار γ اي عدد شريطة ان تكون كافة النقاط الشاذة للتابع $R(p)$ على يسار المستقيم $\text{Re } p = \gamma$.

44. 15 . مثال . نعتبر معادلة من الرتبة الثانية

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b \sin kt, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

جذراها المميزان (71. 13) هما العدداً العقديان المترافقان (غير الحقيقيين)

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{و} \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta \quad \text{حيث} \quad \alpha < 0$$

تصف هذه المعادلة في الكهرباء التذبذبات القسرية في دائرة تحوي مقاومة ومكثف خاضعة لقوة ترددها k . إذا اجرينا تحويل لابلاس على

هذه المعادلة نحصل على:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) Y(p) = \int_0^{\infty} b \sin kte^{-pt} dt = \frac{bk}{k^2 + p^2}$$

بجملها نجد:

$$Y(p) = \frac{bk}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)(k^2 + p^2)}$$

ثم من قانون القلب يأتي:

$$y(t) = \frac{bk}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)(k^2 + p^2)}$$

نضع:

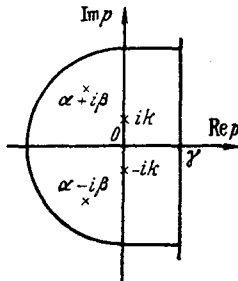
$$f(p) = \frac{e^{pt}}{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)(k^2 + p^2)}$$

يقبل المقام اربعة جذور بسيطة عند النقاط $\pm ik$ و $\alpha \pm i\beta$. يمكن

اختيار γ اي عدد موجب . لحساب التكامل نتمم المستقيم $\text{Re } p = \gamma$ بنصف دائرة نأخذ نصف قطرها كبيراً بكفاية في نصف المستوى الايسر

(الرسم 2. 15)؛ نحصل عندئذ حسب نظرية الرواسب 34. 10:

$$y(t) = bk \{ \text{Res } f(p) |_{p=ik} + \text{Res } f(p) |_{p=-ik} + \\ + \text{Res } f(p) |_{p=\alpha+i\beta} + \text{Res } f(p) |_{p=\alpha-i\beta} \}$$



الرسم 2. 15

نحسب كل راسب حسب الدستور العام 10. 24 (1) باعتبار الاقطاب

$$\text{Res} \frac{A(p)}{B(p)} \Big|_{p=p_0} = \frac{A(p_0)}{B'(p_0)} \quad \text{البيطة:}$$

$$y(t) = bk \left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{(\lambda^2+k^2) 2i\beta a_0} - \frac{e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\bar{\lambda}^2+k^2) 2i\beta a_0} + \frac{e^{ikt}}{(-a_0k^2+a_1ik+a_2) 2ik} - \frac{e^{-ikt}}{(-a_0k^2-a_1ik+a_2) 2ik} \right]$$

اخيرا ، لدينا:

حصيلة ذلك هو تراكب تذبذب دوري تردده يساوي تردد القوة الخارجية وتذبذب متخادم تردده يساوي التردد الذاتي للنظام ؛ تعين سرعة التخاند بالكمية α ، اي بفاصلة الجذرين المميزين .

عندما يكون $\alpha = 0$ و $\beta = k$ فإننا نحصل على رنين . نأخذ حينئذ

المعادلة الاولى الشكل :

$$y'' + k^2y = b \sin kt$$

وحلها هو

$$y(t) = \frac{bk}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{(p^2 - k^2)^2}$$

تشكل النقطتان $p = \pm ik$ قطبين تضاعفهما 2 للتابع الواقع تحت التكامل .

بحساب الرواسب استنادا الى الدستور 10. 24 (2) نجد :

$$y(t) = bk \left[e^{ikt} \left(-\frac{t^2}{4k^2} + \frac{1}{4ik^3} \right) + e^{-ikt} \left(-\frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4ik^3} \right) \right] = \frac{bt}{2k} \cos kt - \frac{b}{2k^2} \sin kt$$

وهذا يمثل تذبذب سعة متزايدة لانهاياً .

54. 15 . يمكن تطبيق نفس الطرق على المعادلات ذات المشتقات الجزئية .

عند تطبيق تحويل لا بلاس تصبح المعادلة التفاضلية العادية المعتبرة معادلة جبرية بالنسبة للتابع المجهول ، اما إذا احتوت المعادلة على المشتقات بالنسبة لـ t وكذلك بالنسبة لـ x ، y ، ... فإن تحويل لا بلاس يزيل المشتقات بالنسبة لـ t ويحتفظ بالمشتقات بالنسبة لـ x ، y ،

نعتبر على سبيل المثال معادلة الحرارة $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ في مجال منته

مع الشروط $0 \leq x \leq l$ مع $u(x, 0) = u_0$ ، $u(l, t) = u_1$ ، $u_x(0, t) = 0$ من وجهة النظر الفيزيائية فهذا يعني ان الحرارة لا تتسرب من النقطة $x = 0$ واننا نحفظ بجرارة ثابتة u_1 عند النقطة $x = l$ بايراد حرارة من الخارج وان درجة الحرارة في اللحظة الابتدائية ثابتة وتساوي u_0 ($t > 0$)
نطبق تحويل لابلاس بالنسبة لـ t فننتقل من التابع $u(x, t)$ الى

التابع:

$$v(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt$$

نحصل بخصوص التابع $v(x, p)$ على المعادلة:

$$\frac{d^2 v(x, p)}{dx^2} - pv(x, p) = -u_0$$

مع الشرطين: $v_x(0, p) = 0$ و $v(l, p) = \frac{u_1}{p}$

تلك هي معادلة من الرتبة الثانية حلها هو

$$v(x, p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\text{ch } x \sqrt{p}}{\text{ch } l \sqrt{p}}$$

ومنه:

$$(1) \quad u(x, t) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} \frac{\text{ch } x \sqrt{p}}{\text{ch } l \sqrt{p}} \frac{dp}{p}$$

إن التابع الواقع تحت التكامل متباين بالنسبة لـ p واقطابه هي

$$p_n = -\frac{\pi^2}{l^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2, \quad p_0 = 0 \quad (\text{حيث } n = 1, 2, \dots)$$

سنبين أن التكامل يساوي المجموعة (غير المنتهي) لرواسب التابع الموافق له

عند كل هذه الاقطاب. للقيام بذلك نعتبر في نصف المستوى الايسر

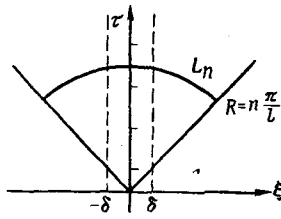
نصف الدائرة Γ_n المتمركزة في مصدر الاحداثيات والتي نصف قطرها

$n^2 \pi^2 / l^2$ (الرسم 3.15)؛ إنها تمر بين قطبين متجاورين؛ سنبين ان النسبة

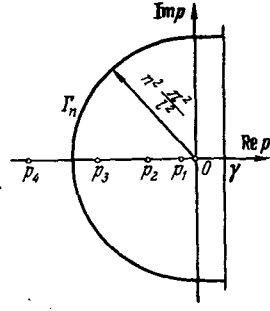
$\frac{\text{ch } x \sqrt{p}}{\text{ch } l \sqrt{p}}$ محدودة على كل نصف الدائرة، ومنه يتضح من توطئة

جوردان 23.11 - د ان التكامل على Γ_n يؤول الى الصفر لما n يؤول الى

∞ ، وبذلك يرد التكامل (1) كالمعتاد الى مجموع الرواسب.



الرسم 4. 15



الرسم 3. 15

بدل اعتبار النسبة $\frac{\text{ch } x \sqrt{p}}{\text{ch } l \sqrt{p}}$ على نصف الدائرة Γ_n حيث $|p| = n^2 \pi^2 / l^2$ يمكن استبدال \sqrt{p} بـ ξ و p بـ ξ^2 واعتبار النسبة $\frac{\text{ch } x \xi}{\text{ch } l \xi}$ على ربع الدائرة L_n ذات نصف القطر $n\pi/l$ وذات زاوية قطبية متغيرة من $\pi/4$ الى $3\pi/4$ (الرسم 4. 15). نضع $\xi = \xi + i\tau$ لدينا $\tau > 0$ و $|\xi| < \tau$ و

$$(2) \quad \left| \frac{\text{ch } x \xi}{\text{ch } l \xi} \right|^2 = \left| \frac{\text{ch } x (\xi + i\tau)}{\text{ch } l (\xi + i\tau)} \right|^2 = \left| \frac{\text{ch } x \xi \cos x\tau + i \text{sh } x \xi \sin x\tau}{\text{ch } l \xi \cos l\tau + i \text{sh } l \xi \sin l\tau} \right|^2 = \frac{\text{ch}^2 x \xi \cos^2 x\tau + \text{sh}^2 x \xi \sin^2 x\tau}{\text{ch}^2 l \xi \cos^2 l\tau + \text{sh}^2 l \xi \sin^2 l\tau} < \frac{\text{ch}^2 l \xi}{\text{ch}^2 l \xi \cos^2 l\tau + \text{sh}^2 l \xi \sin^2 l\tau}$$

إذا كان $|\xi| < \delta$ فإن لدينا $|\tau - n\pi/l| < \epsilon$ على الدائرة L_n من اجل n كبير بكفاية، وبالتالي $\cos^2 l\tau < 1 - \eta$ ، حيث η و ϵ صغيران بالقدر الذي نريد؛ إذن:

$$(3) \quad \left| \frac{\text{ch } x \xi}{\text{ch } l \xi} \right|^2 < \frac{\text{ch}^2 l \xi}{(1 - \eta) \text{ch}^2 l \xi} = \frac{1}{1 - \eta}$$

إذا كان $|\xi| \geq \delta$ فإننا نعوض في مقام الطرف الاخير من (2) $\text{ch}^2 l \xi$ بـ $\text{sh}^2 l \xi$ فنحصل على:

$$(4) \quad \left| \frac{\text{ch } x \xi}{\text{ch } l \xi} \right|^2 < \frac{\text{ch}^2 l \xi}{\text{sh}^2 l \xi} = \coth^2 l \xi < \coth^2 l \delta.$$

ينتج من (3) و (4) ان النسبة $\left| \frac{\text{ch } x \sqrt{p}}{\text{ch } l \sqrt{p}} \right|$ محدود على الدوائر المذكورة بثابت لا يتعلق بـ n . وبالتالي فإن التكامل يرد، كما ذكرنا سابقا، الى مجموعة الرواسب. إن الراسب عند القطب $p=0$ يساوي 1.

اما القطب عند القطب $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ فيساوي، نحسب ذلك بسهولة؛

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)} e^{-\frac{\pi^2}{l^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 t} \cos \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}$$

في الاخير، نحصل على الحل في شكل مجموع سلسلة:

$$u(x, t) = u_0 + \frac{4}{\pi} (u_1 - u_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} e^{-\frac{\pi^2}{l^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 t} \cos \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}$$

§ 15.5 (*) أصناف التوابع شبه التحليلية

15.15. يطبق تحويل لابلاس بكل نجاح في مسائل ذات طابع نظري. تمثل نظرية أصناف التوابع شبه التحليلية نوعا من هذه المسائل (*).

نحن نعلم انه إذا كان $f(x)$ تابعا لمتغير حقيقي x وكان يقبل الاشتقاق لانهايا بجوار نقطة x_0 فهو ليس بالضرورة تحليليا أي انه لا يقبل بالضرورة النشر وفق سلسلة ايلورية بجوار هذه النقطة. لكن إذا كانت مشتقات $f(x)$ لا تزايد بسرعة كبيرة، مثلا إذا حققت هذه المشتقات الشروط:

$$(1) \quad \max_{|x-x_0| < \delta} |f^{(n)}(x)| \leq CM^n n!$$

فإن هذا التابع يصبح تحليليا بجوار النقطة x_0 (انظر 25.8).

إذا طبقنا دستور كوشي 10.43 (1) على مشتقات تابع تحليلي يمكننا بسهولة اثبات القضية العكسية وهي ان تحليلية تابع $f(x)$ بجوار نقطة x_0 تستلزم المتراجحات (1). لتكن $m_0, m_1, \dots, m_n, \dots$ متتالية كيفية من الاعداد الموجبة. ندخل الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ المؤلف من التوابع $f(x)$ المعرفة على المحور: $-\infty < x < \infty$ والمحقة للمتراجحات:

$$|f^{(n)}(x)| \leq CM^n m_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

حيث C و M ثابتان قد يتعلقان باختيار التابع $f(x)$. إذا تزايدت

الاعداد m_n بسرعة تفوق سرعة n فإن الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ يمكن ان يحوي ايضا توابع غير تحليلية. الآ ان دنجوي Denjoy اثبت عام 1921 انه توجد اصناف $C_{\langle m_n \rangle}$ تحوي توابع غير تحليلية لكنها تتمتع بخاصية الوحداية: إذا تساوي تابعان $f(x)$ و $g(x)$ ، منتيمان للصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ ، عند نقطة x_0 وكذا مشتقاتها على التوالي، فإن $f(x)$ و $g(x)$ تابعان متطابقان. إن هذه الخاصية معروفة فيما يخص التوابع التحليلية (نتج من 93.10 - ر).

25. 15. تسمى الاصناف $C_{\langle m_n \rangle}$ التي إذا تطابق تابعان منها ومشتقاتها على التوالي عند نقطة يصبح التابعان متطابقان، تسمى أصناف التوابع شبه التحليلية (أو أصناف شبه تحليلية). قدم كارلمان (Carlman) سنة 1926 وصفا كاملا للأصناف شبه التحليلية. واقترح اوستروفسكي (Ostrovski) سنة 1930 نصا أكثر بساطة. لفهم نصّ كارلمان - اوستروفسكي ينبغي ان نقوم ببعض الإنشاءات التمهيديّة. نفرض ان المتتالية m_n تتزايد لما $n \rightarrow \infty$ بسرعة تفوق سرعة أي تابع من الشكل r^n ، حيث $r > 0$ (سنبين ادناه انه إذا لم يكن الامر كذلك فإن المسألة تصبح في غاية البساطة). عندئذ، من اجل كل $r > 0$ فإن المتتالية r^n/m_n تؤول نحو 0 لما $n \rightarrow \infty$ وبالتالي فهي محدودة. يلعب فيما يلي التابع التالي الدور الرئيسي.

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}$$

يقبل التابع $T(r)$ تفسيراً هندسياً مفيداً. نعتبر في نصف المستوى الايمن من مستوى الاحداثيتين x و y ، متتالية النقاط ذات الاحداثيات $x_n = n$ و $y_n = -\ln m_n$ (نقاط فاليريون Vallron). بما أن $r^n/m_n \rightarrow 0$ لما $n \rightarrow \infty$ فإن $n \ln r - \ln m_n \rightarrow -\infty$ بحيث ان من اجل كل $r > 0$ و $b > 0$ لا يوجد سوى عدد منته من نقاط فاليريون المحققة للمراجعة

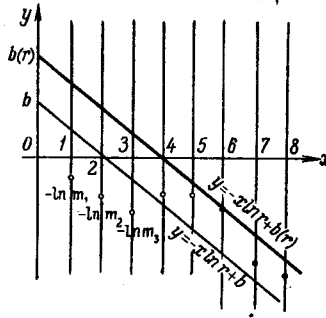
$$(1) \quad n \ln r - \ln m_n \geq b.$$

يقابل المعادلة $r + y = b$ أو المعادلة $y = -x \ln r + b$ في

نصف المستوى الايمن ذي الاحداثيات x و y ، نصف مستقيم معاملة الزاوي $\ln r$ يقطع محور الاحداثية y عند النقطة b . تبين المتراجحة (1) انه لا يوجد فوق نصف المستقيم هذا سوى عدد منته من نقاط فاليريون . إذن ، من اجل كل r يمكن ايجاد نقطة $b = b(r)$ بحيث يستحيل ايجاد نقطة لفاليريون فوق المستقيم

$$y = -x \ln r + b(r)$$

اما على المستقيم ذاته فتوجد على الاقل نقطة (الرسم 5.15) يسمى نصف المستقيم هذا نصف مستقيم فاليريون .



الرسم 5.15

لدينا ، انشاء ، من اجل كل $b = b(r)$ وكل n :

$$-n \ln r + b(r) \geq -\ln m_n$$

بحيث ان .

$$(2) \quad b(r) \geq \sup_n \{n \ln r - \ln m_n\} = \sup_n \ln \frac{r^n}{m_n}$$

لكن ، بما ان المتراجحة (2) تصبح مساواة من اجل عدد n على الاقل فإن لدينا في الواقع :

$$b(r) = \sup_n \ln \frac{r^n}{m_n}$$

إذن :

$$(3) \quad b(r) = \ln T(r)$$

سيساعدنا التفسير الهندسي للتابع $\ln T(r)$ في الوصول الى بعض

خاصيات هذا التابع . نلاحظ في البداية انه ينتج من تعريف التابع $b(r)$

ان $b(r)$ تابع متزايد لـ r : لو كان $b(r_2) < b(r_1)$ من اجل $r_2 > r_1$ لمر كل نصف مستقيم $y = -x \ln r_2 + b(r_2)$ تحت نصف المستقيم $y = -x \ln r_1 + b(r_1)$ ، وهو ما يناقض كون هذا نصف المستقيم يحمل على الاقل نقطة ليفاليرون. ثم ، يمكننا دوما انشاء نصف مستقيم ليفاليرون حسب قيمة b المعطاة (هذه القيمة هي $\inf b(r) >$) وذلك باعتبار جماعة كافة انصاف المستقيمات التي تقطع محور الترتيبات عند النقطة b وبلاستدلال وفق الطريقة الواردة اعلاه. يعني ذلك ان التابع المتزايد $b(r) = \ln T(r)$ يأخذ كل القيم $(\inf b(r) >)$ وبالتالي فهو مستمر (63.5). (يمكن ايضا البرهان على انه تابع خطي بتقطع لـ $\ln r$ لكننا لسنا في حاجة لذلك).

بمقدورنا الآن تقديم نص اوستروفسكي لنظرية كارلمان:

نظرية: نضع

$$(4) \quad T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}$$

عندئذ، لكي يكون الصنف $C_{\langle mn \rangle}$ شبه تحليلي يلزم ويكفي ان يكون:

$$(5) \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty$$

ليكن مثلا $m_n = (n!)^\alpha$ ، حيث α مثبت. من السهل حينئذ ان

نرى، باستخدام دستور ستيرلينغ (75.11 - ب)، بأن $T(r) \sim r^{1-\alpha}$

وبأن التكامل (5) متقارب من اجل $\alpha > 1$ ومتباعد من اجل $\alpha \leq 1$.
ينتج عندئذ من نظرية كارلمان ان الصنف $C_{\langle (n!)^\alpha \rangle}$ يكون شبه تحليلي إذا وفقط إذا كان $\alpha \leq 1$ (نذكر فضلا عن ذلك ان هذا الصنف مشكل من توابع تحليلية).

هناك اصناف شبه تحليلية تحوي، فيما تحوي، توابع غير تحليلية. يمكن

ان نثبت مثلا ان التابع $f(x) = \sum T^{-1}(n) \cos nx$ ينتمي للصنف

$C_{\langle mn \rangle}$ وهو ليس تحليليا في حالة $\sqrt[n]{m_n/n} \rightarrow \infty$ ؛ إذن من اجل:

غير تحليلية. $m_n = n! \ln^n n$ مثلا فإن الصنف شبه التحليلي $C_{\langle mn \rangle}$ يحوي توابع

35. 15. نبرهن فيما يلي (35. 15 - 65. 15) على نظرية كارلمان. اوستروفسكي الواردة في 25. 15.

نرد، في هذه الفقرة، مسألة تمييز الاصناف شبه التحليلية الى مسألة حول التوابع التحليلية في نصف مستو، وذلك باستخدام تحويل لابلاس. لنفرض أن الصنف $C_{\langle mn \rangle}$ ليس شبه تحليلي. يعني ذلك انه يوجد تابعان $f(x)$ و $g(x)$ متطابقان عند نقطة $x = x_0$ وكذا مشتقاتها على التوالي، بدون ان يكون هذان التابعان متطابقين اينما كان. دون المس بعمومية المسألة، نستطيع وضع $x_0 = 0$ و $f(x) \not\equiv g(x)$ من اجل $x > 0$ ؛ يمكننا دوما الرجوع لهذه الحالة باجراء انسحاب وتعويض x بـ $-x$ ، أي باجراء العمليات القابلة للإنجاز في الصنف $C_{\langle mn \rangle}$. نعتبر بعد ذلك التابع $\varphi(x)$ المنعدم من اجل $x < 0$ والمساوي لـ $f(x) - g(x)$ من اجل $x \geq 0$ ؛ من البديهي انه تابع ينتمي الى الصنف $C_{\langle mn \rangle}$. بما ان التابع منعدم من اجل $x < 0$ ومحدود من اجل $x > 0$ فهو يقبل محوالة للابلاس:

$$(1) \quad \Phi(p) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-px} dx$$

وهي تابع تحليلي في نصف المستوى $\text{Re } p > 0$. نبرز الآن بعض خاصيات التابع $\Phi(p)$. إذا كاملنا بالتجزئية n مرة

$$\text{في المساواة (1) نحصل على: } p^n \Phi(p) = \int_0^{\infty} \varphi^{(n)}(x) e^{-px} dx$$

ومنه يأتي التقدير:

$$|p^n \Phi(p)| \leq CM^n m_n \int_0^{\infty} e^{-px} dx = CM^n m_n \frac{1}{|p|} \leq C_\gamma M^n m_n$$

وذلك من اجل $|p| > \gamma > 0$. القضية العكسية قائمة ايضا، لرؤية ذلك نعتبر $\Phi(p) \not\equiv 0$ تابعا تحليليا معطى في نصف المستوى الكيفي

$\text{Re } p > \gamma_0 > 0$ يحقق المتراجحات.

$$|p^n \Phi(p)| \leq CM^n m_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

من البديهي ان $\Phi(p)/p^2$ يحقق فرض النظرية 24. 15 - أ؛ يمكن اختيار مثلا $Cm_0 \frac{1}{|\gamma_0 + i\eta|^2}$ بمثابة الحد الاعلى القابل للمكاملة الذي يتطلبه الشرط (2) من النظرية المذكورة اعلاه. يأتي من النظرية هذه ان التابع

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Phi(p)}{p^2} e^{px} dp \quad (\gamma > \gamma_0)$$

منعدم من اجل $x > 0$. لما كان $\Phi(p) \neq 0$ فإن لدينا ايضا $\varphi(x) \neq 0$ من اجل $x > 0$. اضافة الى ذلك فإن $\varphi(x)$ يقبل

الاشتقاق من كل الرتب:

$$\begin{aligned} |(\varphi(x) e^{-\gamma_0 x})^{(n)}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Phi(p)}{p^2} (p-\gamma_0)^n e^{(p-\gamma_0)x} dp \right| \leq \\ &\leq \frac{CM^n m_n}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left| \frac{p-\gamma_0}{p} \right|^n \left| \frac{dp}{p^2} \right| \leq \frac{C}{2\pi} M^n m_n \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left| \frac{dp}{|p|^2} \right| = C' M^n m_n \end{aligned}$$

نرى إذن ان التابع $\varphi(x) e^{-\gamma_0 x}$ ينتمي الى الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$. بما أن

$$C_{\langle m_n \rangle} \varphi(x) \neq 0 \quad \text{و} \quad x < 0 \quad \text{فإن الصنف } C_{\langle m_n \rangle}$$

ليس شبه تحليلي. إذن فإن مسألة شبه تحليلية صنف $C_{\langle m_n \rangle}$ معطى تكافئ مسألة وجود تابع $\Phi(p) \neq 0$ تحليلي في نصف المستوى $\text{Re } p > \gamma_0$ يحقق المتراجحات:

$$|p^n \Phi(p)| \leq CM^n m_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(« مسألة واتسن Watson »).

45. 15. بالقلب $p = 2\gamma/s$ يصبح نصف المستوى $\text{Re } p > \gamma$ هو القرص $|s-1| < 1$ وترد مسألة واتسن الى المسألة التالية: ما هي الشروط التي ينبغي توفرها في متتالية m_n لكي يوجد في القرص $|s-1| < 1$ تابع تحليلي $F(s) \neq 0$ يحقق المتراجحات:

$$(1) \quad |F(s)| \leq CM^n m_n |s|^n$$

نلاحظ على سبيل المثال ان مثل هذا التابع غير موجود عندما يكون
 $m_n \leq C_1 r_0^n$ من اجل متتالية اعداد n_1, n_2, \dots . ذلك انه إذا

كان:

$$|F(s)| \leq CM^n C_1 r_0^n |s|^n = CC_1 (Mr_0 |s|)^n \quad (n = n_1, n_2, \dots)$$

فإن اختيار $|s| < 1/(Mr_0)$ والانتقال الى النهاية من اجل
 $n_k \rightarrow \infty$ يؤدي الى $F(s) \equiv 0$ خلافا للإفتراض. وهكذا فإن
 الصنف $C_{(m_n)}$ شبه تحليلى ضمن الافتراضات المتخذة على المتتالية m_n .
 من جهة أخرى لدينا في الحالة الراهنة:

$$T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n} = \infty \text{ pour } r > r_0$$

اما الشرط (1) فهو محقق بداهة. كما سبق ان رأينا في 25.15 عندما
 يكون $m_{nk} \leq C_1 r_0^{nk}$ ($k = 1, 2, \dots$) فإن المسألة بسيطة جداً.

نعود الى الحالة العامة ونفرض وجود تابع $F(s)$ يحقق الشروط

المذكورة. يمكن ايجاد ρ بحيث $F(\rho) \neq 0$ ، $|F(\rho + \rho e^{i\theta})| < 1$
 من اجل كل الاعداد الحقيقية θ وبحيث يكون التابع $F(s)$ على الدائرة:
 $s = \rho + \rho e^{i\theta}$ صفر واحد عند $s = 0$. إن كل الانشاءات التي اوردناها

محققة في القرص $|s - \rho| \leq \rho$. بفضل المتراجحات (1) لدينا:

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leq CM^n m_n \rho^n |1 + e^{i\theta}|^n = CM^n m_n \left| 2\rho \cos \frac{\theta}{2} \right|^n$$

بأخذ اصغر قيمة في الطرف الاخير من المتراجحة الاخيرة نجد:

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leq \frac{C}{\max_n \frac{1}{M^n m_n \left| 2\rho \cos \frac{\theta}{2} \right|^n}}$$

ومن تعريف التابع $T(r)$:

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leq \frac{C}{T \left(\frac{1}{2M\rho \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|} \right)}$$

إذن:

$$\ln |F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leq \ln C - \ln T \left(\frac{1}{2M\rho \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|} \right)$$

لدينا النظرية التالية (سنورد برهانها في 65.15) المتعلقة بالتتابع التحليلية: إذا كان $\Phi(z)$ تابعا تحليليا في القرص $|z - z_0| < h$ وكان غير منعدم عند $z = z_0$ ولا يتجاوز الوحدة بالطويلة وكان مستمرا في القرص المغلق $|z - z_0| \leq h$ ويقبل صفرا واحدا على الدائرة $|z - z_0| = h$ فإن التكامل:

$$-\int_0^{2\pi} \ln |\Phi(z_0 + he^{i\theta})| d\theta \quad \text{منته .}$$

بتطبيق هذه النظرية على التابع $\Phi(z) = F(z)$ نرى ان التابع:

$$\ln T \left(\frac{1}{2M\rho \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|} \right) \leq \ln C - \ln |F(\rho + \rho e^{i\theta})|$$

يقبل هو الآخر تكاملا منتهيا بالنسبة لـ θ من الصفر الى 2π . إذا

$$2M\rho \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{r} \quad \text{اجرينا التعويض .}$$

$$\int_a^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} \frac{1}{\sqrt{M^2\rho^2 - \frac{1}{4r^2}}} dr \quad \text{فإننا نصل الى تقارب التكامل:}$$

وكذلك الى تقارب التكامل:

$$(2) \quad \int_a^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr$$

اخيرا، إذا لم يكن الصنف $C_{\langle mn \rangle}$ شبه تحليلي فإن التكامل (2) متقارب. بين ذلك كفاية شرط كارلمان الوارد في 25.15 .

55.15 . نشرع في البرهان على لزوم شرط كارلمان بافتراض ان التكامل 45.15 (2) متقارب. عندئذ يكون الامر كذلك فيما يخص التكامل:

$$\int_0^{2\pi} \ln T \left(\frac{1}{2M\rho \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|} \right) d\theta,$$

وبالتالي يمكن انشاء تكامل بواسون (Poisson):

$$G(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln T \left(\frac{1}{2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|} \right) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta$$

الذي هو تابع توافقي في الدائرة $r < 1$. نضع $G(s-1) = P(s)$ ونرمز بـ $Q(s)$ للتابع التوافقي المرافق (94.14 - ج) في القرص $|s-1| < 1$ ليكن بعد ذلك: $F(s) = e^{-(P(s)+4Q(s))}$

حينئذ يحقق التابع $F(s)$ المتراجحات:

$$(1) \quad |F(s)| \leq m_n |s|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ذلك ان المتراجحات (1) تكافئ المتراجحات:

$$e^{-P(s)} \leq m_n |s|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

أو المتراجحات:

$$(2) \quad -G(s) = -P(s+1) \leq \ln m_n + n \ln(s+1)$$

يمكن تمثيل الحدين في الطرف الأيمن من (2) على شكل تكاملي بواسون:

$$\ln m_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln m_n (1-r^2)}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta,$$

$$n \ln |s+1| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n \ln |e^{i\theta}+1| (1-r^2)}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta,$$

بعد ذلك تصبح المتراجحة (2) المطلوب اثباتها كالتالي:

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \ln \left\{ T \left(\frac{1}{2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|} \right) m_n |1 + e^{i\theta}|^n \right\} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta \geq 0.$$

لكن $|1 + e^{i\theta}| = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$ ؛ لما كان:

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}$$

لدينا من اجل كل n على حدة:

$$T(r) \geq \frac{r^n}{m_n}, \quad T(r) m_n r^{-n} \geq 1$$

وبالتالي فإن التابع تحت رمز المكاملة في (3) غير سالب. ينتج من ذلك ان المتراجحة (3) محققة؛ وبالتالي فالأمر كذلك بالنسبة لـ (1)، ومنه يأتي ان الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ ليس شبه تحليلي حسب 35.15. ينتهي بذلك برهان نظرية كارلمان.

65. 15 . نبرهن هنا على النظرية المستخدمة في 45. 15 .

نظرية. إذا كان تابع $f(z)$ تحليليا في قرص $|z - z_0| < h$ وغير منعدم عند $z = z_0$ ولا يتجاوز العدد واحد بالطويلة، وكان مستمرا في القرص المغلق $|z - z_0| \leq h$ ويقبل صفرا واحداً z^* على الدائرة $|z - z_0| = h$ فإن التكامل:

$$-\int_0^{2\pi} \ln |f(z_0 + he^{i\theta})| d\theta$$

منته.

البرهان. بدون المس بعمومية القضية يمكننا وضع $z_0 = 0$ و $h = 1$ و $z^* = 1$. إن التابع $f(z)$ تحليلي في القرص $|z| < 1$ ولا يمكن ان يوجد في هذا القرص سوى عدد منته من الاصفار z_1, \dots, z_m ؛ نستطيع ان نفرض انه لا توجد اصفار على الدائرة $|z| = 1$. نعتبر المحيط المغلق C المبين في الرسم 6. 15 وهو مشكل من اقواس الدائرة $|z| = r$ مرسومة في الاتجاه الموجب والدوائر C_k ($k = 1, 2, \dots, m$) التي لها نصف قطر ε صغير جداً، مرسومة في الاتجاه السالب وبالمنحنيات $L_k = [z_k^*, z_k^*]$ التي تربط الاقواس المذكورة، وهي مرسومة كلها مرتين في اتجاهين متعاكسين. إن التابع $\ln f(z)$ تحليلي داخل المحيط C ويمكن تمثيل القيمة $\ln f(0)$ بدستور كوشي:

$$(1) \quad \ln f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln f(z) \frac{dz}{z}.$$

نعتبر جزء المحيط C ، المشكل من الدائرة C_j ذات نصف القطر ε والمتمركزة عند النقطة z_j ، نرسم هذه الدائرة في الاتجاه السالب. يكتب جزء التكامل (1) المأخوذ على طول الدائرة C_j على الشكل:

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \ln f(z) \frac{ie^{i\theta} d\theta}{z_j + \varepsilon e^{i\theta}}.$$

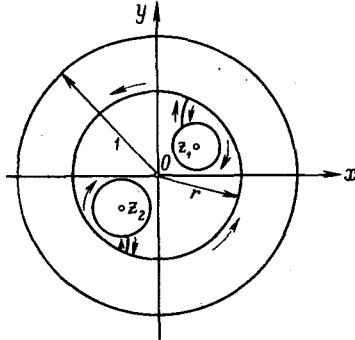
إذا كان k_j هو تضاعف الجذر z_j فإن:

$$f(z) = (z - z_j)^{k_j} f_j(z)$$

حيث $f_j(z_j) \neq 0$ ولدينا :

$$\begin{aligned} |\ln f(z)| &= |\ln(z-z_j)^{k_j} f_j(z)| = \\ &= |k_j \ln(z-z_j) + \ln f_j(z)| \leq k_j |\ln|z-z_j| + 2\pi| + \\ &+ |\ln f_j(z)| \leq k_j |\ln \varepsilon| + C_1. \end{aligned}$$

يتبين من هذا التقدير ان التابع الواقع تحت التكامل في (2) يصبح صغيرا بالقدر الذي نريد عندما نجعل ε يؤول الى الصفر؛ وبالتالي فإن جميع التكاملات على طول الدوائر C_j تؤول الى الصفر عندما يؤول ε الى الصفر



الرسم 6. 15

إذن فإننا عندما نحيط بالنقطة z_j في الاتجاه السالب يتزايد التابع :
 $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$ بمقدار $-2\pi k_j i$ ؛ وبالتالي فإن
 التكامل على طول جزء المحيط المشكل فمن قطعة المستقيم L_j المرسومة
 مرتين في الاتجاهين المتعاكسين، يساوي :

$$k_j \int_{L_j} \frac{dz}{z} = k_j [\ln z_j - \ln z_j].$$

نلاحظ على كل جزء موال من الدائرة $|z| = r$ ان التابع $\ln f(z)$
 يتزايد بمقدار $-2\pi k_j i$ ، وهو ما يضيف الى التكامل (1) الكمية

$$k_j \int_{z_j}^{z_j+1} i d\theta$$

التي تمثل عددا تخيلياً محضاً. بعد ذلك نفصل الجزء الحقيقي في المساواة

(1) $\varepsilon \rightarrow 0$ ؛ نحصل على:

$$\ln |f(0)| = \sum_{j=1}^m k_j \ln |z_j| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

لكن، $\ln |z_j| < 0$ ، $|z_j| < 1$ كان ، فإن:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \geq \ln |f(0)|$$

وهذا يعني بالضبط أن

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \leq -\ln |f(0)|$$

لدينا على الدائرة $|z| = 1$ فرضاً صفر واحد عند النقطة $z^* = 1$.

نختار عدداً $\delta > 0$ كيفياً؛ من البديهي أن:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi-\delta} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \leq -\ln |f(0)|.$$

نحتفظ بـ δ مثبتاً وننتقل الى النهاية بجعل r يسعى الى 1 في المتراجحة

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi-\delta} \ln |f(e^{i\theta})| d\theta \leq -\ln |f(0)|.$$

السابقة، نحصل عندئذ على:

إن هذه المتراجحة قائمة من اجل كل $\delta > 0$. بالانتقال الى النهاية

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\theta})| d\theta \leq -\ln |f(0)|$$

نرى ان التكامل:

موجود. انتهى برهان النظرية.

تمارين

1. اثبت تقارب تكامل فوريي :

$$\varphi(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{\sin pt}{t} dt$$

عند نقطة x التي بجوارها يكون التابع $\varphi(x)$ مستمرا ورتيباً، اثبت كذلك تقاربه المنتظم في كل مجال مغلق داخل مجال رتبة واستمرار للتابع

• $\varphi(x)$.

2. قدم مثالا لتابع $\varphi(x)$ مستمر ويقبل تكاملاً لفوريي متقاربا بانتظام، وحيث يكون التابع

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx$$

غير متقارب مطلقاً على $-\infty < \sigma < \infty$

3. قدم مثالا لتابع $\varphi(x)$ بحيث يكون تكامله فوريي :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{\sin pt}{t} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi$$

متقاربا بانتظام على المحور $-\infty < x < \infty$ ، لكن كلا من التكاملين :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-p}^0 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\}$$

يقبل نقاط تباعد.

4. اثبت « مساواة بارسفال Parseval » :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

حيث $g(\sigma)$ هو محولة فوريي تابع $f(x)$ يحقق فرض النظرية 31.15 ومربعة يقبل المكاملة على كل المحور $-\infty < x < \infty$ (بنونشرال (Plancherel).

5. برهن على « علاقة الشك »

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 |g(\sigma)|^2 d\sigma \geq \frac{\pi}{2}$$

بافتراض ان التابعين $f(x)$ و $xf(x)$ يحققان فرض التمرين 4 وان

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$$

6. ليكن $F(p)$ محولة لابلاس تابع $f(t)$. اوجد محولات لابلاس

التوابع: $f_1(t) = e^{at}f(t)$ ، $f_2(t) = f'(t)$ ، $f_3(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ ،

$$f_4(t) = tf(t) ، f_5(t) = \frac{f(t)}{t}$$

7. اوجد محولات لابلاس التوابع: $\varphi_1(t) = e^{at}$ ، $\varphi_2(t) = t^{\alpha-1} (\alpha > 0)$ ،

$$\varphi_3(t) = t^{\alpha-1} e^{at} ، \varphi_4(t) = \sin at$$

$$\varphi_5(t) = \cos at ، \varphi_6(t) = \frac{\sin at}{t}$$

8. اثبت دستور القلب لميلين (Mellin): إذا كان:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$$

فإن:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) x^{-s} ds.$$

نبذة تاريخية

ظهر تكامل فوريي لأول مرة في كتاب فوريي « النظرية التحليلية للحرار » (1822) حيث طبق هذا التكامل على العديد من مسائل الفيزياء الرياضية. لم تتضمن اعمال فوريي وكذا اعمال كوشي الذي استخدم تكامل فوريي عند دراسة انتشار الأمواج (2 - 184)، أي برهان على التقارب؛ برزت البراهين السليمة، ضمن افتراضات مختلفة، خلال كل القرن التاسع عشر، وهي تمثل تعديلات في البراهين الموافقة لها الخاصة بتقارب سلاسل فوريي. اما « تحويل لا بلاس » فقد درسه وطوره لا بلاس سنة 1812 في « النظرية التحليلية للإحتمالات »؛ نلاحظ ان اولر كان قد اعتبر منذ 1737 تكاملات $e^{-px} f(x)$ لحل معادلات تفاضلية عادية. لم يُتعرض زمن أولر ولا بلاخ أبداً لإستعمال تحويل لا بلاس في الساحة العقدية. انطلقت ابتداء من سنة 1892 اعمال المهندس الانكليزي هيفيسايد (Heaviside) الذي عثر، بفضل تفسير وفق قواعد ادخلها فو نفسه لتتابع $p = \frac{\partial}{\partial t}$ (خارج صنف التتابع الكسرية)، على حلول بعض المسائل الكهروتقنية التي ترد الى معادلات ذات مشتقات جزئية. ظل خلال فترة من الزمن « الحساب المؤثري » هيفيسايد بدون اساس رياضي. ثم قام ابتداء من 1910 برومويش (Bromwich) ثم كارسون (Carson) وفان داربول (Van der Pol) وداتش (Doetsch) بتبريد قواعد هيفيسايد بتطبيقهم لتحويل لا بلاس في الساحة العقدية. يرجع عهد اعمال دانجوي وكارلمان واوستروفسكي مول اصناف التتابع شبه التحليلية الى 1920 - 1930.

إن التقدم الذي تحقق فيما بعد في نظرية تحويل فوريي مرتبط من جهة باستخدام تكامل لوبيغ (وتكامل لوبيغ - ستيلجاس) وبنظرية التوزيعات (أو التتابع المعممة) من جهة ثانية؛ نلاحظ بصفة خاصة ان التوزيعات تسمح بتعريف محولة فوريي تابع يتزايد لا نهائيا (لما $|x| \rightarrow \infty$). ثم إن هذا الامر، بدوره، امر رئيسي لحل مسائل اساسية في نظرية المعادلات الخطية ذات المشتقات الجزئية وذات المعاملات الثابتة. راجع (13) و (15) و (10).

المنحنيات الاساسية

إن موضوع الرياضيات البحث هو الاشكال الفضائية والنسب الكمية للعالم الواقعي، وبالتالي فهي مادة جد ملموسة. إن بدت هذه المادة في شكل تجريدي الى حد كبير فإن ذلك لا يمكنه ان يجلب مصدرها، الواقع في العالم الخارجي، إلا بستار شفاف.

ف. انغلس F.Engels

§ 16 1. تعاريف اساسية

11. 16. يعرف منحن L في فضاء R_n بعده n على انه محل هندسي تعينه جملة معادلات وسيطية:

$$(1) \quad x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

أو، وهو الامر نفسه، معادلة شعاعية:

$$(2) \quad x = x(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

يسمى الشعاع $x(t)$ نصف قطر شعاع المنحنى L .

نفرض أن التوابع $x_j(t)$ مستمرة وتحقق بعض شروط الاشتقاق التي سنحددها فيما بعد. حتى يكون محل هندسي (1) من الشكل المعتاد لمنحن فإنه لا يكفي ان تكون التوابع $x_j(t)$ مستمرة: توجد جل من النوع (1) اطرافها الثانية مستمرة في حين ان المحل الهندسي المقابل لها يمثل كل الفضاء R_n (راجع التمرين 5). نلاحظ ايضا انه بالامكان ان يمثل نفس المنحنى (اي نفس المحل الهندسي) بعدة جل مختلفة من النوع (1)؛ على

سبيل المثال فإن الجملتين:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

$$x = r \cos (t^2), \quad y = r \sin (t^2) \quad \text{و}$$

تعرفان من اجل $-\infty < t < \infty$ نفس المحل الهندسي في المستوى (x, y) وهو الدائرة المعينة بنصف قطرها r ومركزها مركز الاحداثيات. سرى بعد حين ان اختيار التمثيل الوسيطين المناسب يسهل في اغلب الاوقات كتابة الخاصيات الهندسية لمنحن معلوم، صراحة.

21. 16. كنا رأينا حالة اعم كان $x(t)$ ، الوارد في المعادلة 11. 16 (2)، يمثل فيها نقطة من فضاء متري تتعلق بوسيط t ؛ كان ذلك منحنيًا في فضاء متري. عرفنا في 16. 12، في الحالة التي تكون فيها قيم التابع $x(t)$ متممة لفضاء نظيمي B ، مشتق التابع الشعاعي $x(t)$ عند نقطة $t = c$ كما يلي:

$$(1) \quad x'(c) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(c + \Delta t) - x(c)}{\Delta t}$$

وذلك عند وجود الطرف الايمن بمفهوم مسافة الفضاء B . حينئذ يكون التابع $x(t)$ قابلاً للإشتقاق عند نقطة $t = c$. إذا وجدت النهاية (1) من اجل كل $c \in [a, b]$ فإن التابع $x(t)$ يقبل الاشتقاق على المجال $[a, b]$.

سندرس التوابع القابلة للاشتقاق التي قيمها في فضاء ذي بعد m ، لكن هناك نتائج ستكون صالحة حتى في فضاء نظيمي (ذي بعد غير منته).

31. 16. نلاحظ باديء ذي بدء انه بما ان الانتقال الى النهاية في فضاء بعده m يكافيء الانتقال الى النهاية احداثية احداثية فإن قابلية التابع الشعاعي $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ للإشتقاق عند $t = c$ بمفهوم 21. 16 (1) يكافيء قابلية اشتقاق m تابعاً عديداً $x_1(t), \dots, x_m(t)$ عند $t = c$ ؛ اضافة الى ذلك، لدينا:

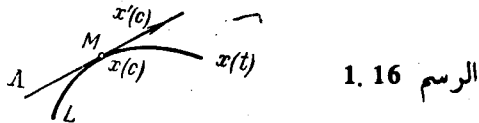
$$(1) \quad x'(c) = (x'_1(c), \dots, x'_m(c)) \in R_m$$

لنفسر هندسيا قابلية تابع شعاعي للاشتقاق. كنا تكلمنا في هذا الموضوع في بداية الفصل 13؛ نعالج في هذا الفصل القضية بشكل مستقل وبالتفصيل.

يمكن وضع التعريف 16. 21 (1) للمشتق في شكل مكافئ:

$$(2) \quad \Delta x \equiv x(c + \Delta t) - x(c) = x'(c) \Delta t + \varepsilon(t) \Delta t,$$

حيث يؤول الشعاع $\varepsilon(t)$ الى الصفر من اجل $\Delta t \rightarrow 0$. تبين المساواة (2) ان تزايد التابع $x(t)$ عندما يتغير t من c الى $c + \Delta t$ يحوي الجزى الخطي الرئيسي $x'(c) \Delta t$. نقول عن نقطة $t = c$ إنها عادية (أو معتادة) إذا كان $x'(c) \neq 0$ ، وإنها نقطة شاذة عندما $x'(c) = 0$. (انظر 36.9 - ص). إن الصورة الهندسية الموافقة للمعادلة الخطية:



في الحالة التي تكون فيها النقطة $t = c$

عادية هي المستقيم Λ المار بالنقطة $M = x(c)$ في اتجاه الشعاع $x'(c)$ (الرسم 1.16).

وهكذا فإن الانحراف من نقطة على المنحنى الى النقطة المقابلة لها (أي من اجل نفس القيمة لـ t) على المستقيم Λ ، لا متناهي الصفر رتبته عليا بالنسبة لـ Δt . لهذا السبب، سمي المستقيم Λ مماس المنحنى L عند النقطة M . بحيث ان وجود مشتق $x'(c)$ غير منعدم يكفي وجود مماس للمنحنى L عند النقطة M ؛ اما الشعاع $x'(c)$ فهو الشعاع الموجه (أو التوجيهي) لهذا المماس.

41. 16. لـ ماذا يحدث لشعاع موجه لمماس عندما تنتقل على المنحنى L

الى وسيط جديد τ بحيث يكون $t = t(\tau)$ تابعا قابلا للاشتقاق لـ τ .

ليكن، بصفة خاصة، $c = t(\gamma)$ و $t'(\gamma) \neq 0$. نضع عندئذ:

$$x(t(\tau)) \equiv g(\tau)$$

ونكتب :

$$(1) \quad g'(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = x'(t) t'(\tau)$$

وذلك حسب قاعدة اشتقاق تابع مركب (16.12 - ط).

وبالتالي فإن للشعاع الموجه الجديد $g'(\tau)|_{\tau=\gamma}$ نفس اتجاه الشعاع القديم $x'(t)$ ، ونستنتج الاول من الثاني بضرب هذا الاخير في $t'(\tau)$. وهكذا فإن طول الشعاع الموجه للماس لا يقبل اي تفسير هندسي مباشر . كما سبق وان ذكرنا في 11.13 - د يمكننا منح الشعاع $x'(t)$ معنى حركي ؛ إذا رمز t للزمن فإن $x'(c)$ هو سرعة حركة النقطة $x = x(t)$ على طول المنحنى L في اللحظة $t = c$.

51.16 . ندخل اخيرا مفهوم تفاضلية تابع شعاعي $x(t)$. يسمى الشعاع $dx = x'(c) dt$ ، حيث $dt = \Delta t$ تزايد كيني للوسيط t ، تفاضلية التابع الشعاعي $x(t)$ عند $t = c$. إذن فإن تفاضلية تابع هي الجزء الخطي الرئيسي لتزايد الموافق لتزايد المتغير المستقل t .

لدينا كما ورد اعلاه نظرية لا تغير التفاضلية: إن تفاضلية تابع لها نفس الشكل سواء كان t متغيرا مستقلا او تابعا لمتغير آخر مستقلا (يمثل dt في الحالة الاخيرة الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $t(\tau)$).

ذلك انه إذا كان $g(\tau) = x[t(\tau)]$ فإن :

$$d_{(\tau)}x = g'(\gamma) d\tau = x'(c) t'(\gamma) d\tau = x'(c) dt = d_{(t)}x,$$

وهو ما اكدهناه.

61.16 . مكاملة تابع شعاعي . عرفنا هذه العملية ضمن 26.12 فيما يخص التوابع الشعاعية التي تأخذ قيمها في فضاء نظيمي B . تكامل تابع شعاعي $x(t)$ ، $a \leq t \leq b$ ، قيمه في فضاء تام B ، مثلا في الفضاء R_m ، هو

$$\int_a^b x(t) dt = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k) \Delta t_k,$$

تعريفا الكمية :

$$\Pi = \{a = t_0 \leq \xi_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b\}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$

حيث يتعلق الامر بالنهاية بالنسبة لنظم الفضاء B من اجل التقسيم اللامنتهي للتجزئة Π ، اي من اجل

$$d(\Pi) = \max \Delta t_k \rightarrow 0$$

اثبت وجود التكامل باعتبار $x(t)$ مستمرا بتقطع. اشرنا ضمن

26. 12 - ج لأهم خاصيات التكامل :

$$\int_a^b \alpha x(t) dt = \alpha \int_a^b x(t) dt \quad (1)$$

وهذا من اجل α حقيقي .

$$\int_a^b [x(t) + y(t)] dt = \int_a^b x(t) dt + \int_a^b y(t) dt \quad (2)$$

$$\int_a^c x(t) dt + \int_c^b x(t) dt = \int_a^b x(t) dt \quad (a \leq c \leq b) \quad (3)$$

$$\left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \|x(t)\| (b-a). \quad (4)$$

نستكمل هذه الخاصيات بدستور المكاملة بالتجزئة

$$\int_a^b u(t) dv(t) = u(t)v(t) \Big|_a^b - \int_a^b v(t) du(t) \quad (5)$$

يمثل هنا $u(t)$ تابعا قابلا للاشتقاق قيمه في الفضاء B ، اما $v(t)$ فيمثل تابعا عدديا قابلا للاشتقاق. يشبه البرهان على الدستور (5) البرهان المائل له الخاص بالتوابع العددية (9. 15 - أ).

16. 71. المشتقات ذات الرتب العالية .

أ. عرفنا المشتقات من الرتب العالية لتابع شعاعي $x(t)$ في 46. 12. إن المشتق من الرتبة n هو تعريفا المشتق الاول للمشتق من الرتبة $(n-1)$ إن كان هذا الاخير تابعا قابلا للاشتقاق من اجل $a \leq t \leq b$ نفرض فيما يلي وجود كل هذه المشتقات .

ب. لـ كيف تتغير التوابع الشعاعية x_t ، x_{tt} ، ... عندما نعوض المتغير المستقل t بمتغير مستقل جديد τ ، $t = t(\tau)$ ، حيث $t(\tau)$ تابع لـ τ مرن بكفاية .

كنا رأينا (41.16) ان المشتق الاول بالنسبة لـ t لا يختلف عن المشتق الاول بالنسبة لـ τ الآ بالعامل $t(\tau)$:

$$x_\tau = x_t t_\tau$$

باشتقاق هذه المساواة بالنسبة لـ τ وبتطبيق مرة اخرى دستور اشتقاق تابع مركب نجد:

$$x_{\tau\tau} = (x_\tau)_\tau = (x_t t_\tau)_\tau = (x_t)_\tau t_\tau + x_t t_{\tau\tau} = x_{tt} t_\tau^2 + x_t t_{\tau\tau}$$

من ذلك نلاحظ ان الشعاع $x_{\tau\tau}$ ليس موازيا عموما للشعاع x_{tt} لكنه يقع في مستوى الشعاعين x_t و x_{tt} . وهكذا فإن المستوى المعين بالشعاعين x_t و x_{tt} لا يتعلق باختيار الوسيط، على الرغم من ان موقع الشعاع x_{tt} في المستوى يتغير عند الانتقال الى وسيط جديد.

في الحالة العامة، مهما كان n ، فإن الشعاع $x_t^{(n)}$ ينتمي الى الفضاء الجزئي ذي البعد n المولد عن الاشعة $x_t, x_{tt}, \dots, x_t^{(n)}$ نبرهن على ذلك بالتدرج: نفرض العلاقة:

$$x_\tau^{(n)} = \sum_{k=1}^n x_t^{(k)} \varphi_k(\tau)$$

ونشتقها مرة اخرى بالنسبة لـ τ ؛ نحصل على:

$$x_\tau^{(n+1)} = \sum_{k=1}^n x_t^{(k+1)} t_\tau \varphi_k(\tau) + \sum_{k=1}^n x_t^{(k)} \varphi_k'(\tau),$$

بحيث يمكن التعبير خطأً على $x_\tau^{(n+1)}$ بواسطة:

$$x_t, x_{tt}, \dots, x_t^{(n+1)}$$

وهو المطلوب.

يمكن القول ان الذي له معنى هندسي ليست الاشعة $x_t, x_{tt}, \dots, x_t^{(n)}, \dots$ ذاتها بل المنوعات الخطية المولدة عنها. تسمى هذه المنوعات الخطية الفضاءات الجزئية الملاصقة من البعد 1، 2، ...، n (وهذا في الحالة التي تكون فيها x_t, x_{tt}, \dots مستقلة خطياً).

ج. إذا كان التابع $x(t)$ يقبل الاشتقاق $n+1$ مرة على المجال

[a, b] فإن دستور تايلور (46.12 - ج) قائم:

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &\equiv x(t + \Delta t) - x(t) = \\ &= x'(t) \Delta t + x''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dots + x^{(n)}(t) \frac{(\Delta t)^n}{n!} + Q_n\end{aligned}$$

عندما نضع $n = 1, 2, \dots$ في العلاقة السابقة ونستخدم التقدير الوارد في 46.12 - ج بخصوص Q_n نصل الى سلسلة دساتير تزداد دقة اكثر فأكثر:

$$\begin{aligned}(1) \quad &\Delta x(t) = x'(t) \Delta t + \varepsilon_1(t) \Delta t, \\ (2) \quad &\Delta x(t) = x'(t) \Delta t + x''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \varepsilon_2(t) (\Delta t)^2, \\ (3) \quad &\Delta x(t) = x'(t) \Delta t + x''(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + x'''(t) \frac{(\Delta t)^3}{6} + \varepsilon_3(t) (\Delta t)^3, \\ &\dots\end{aligned}$$

21.16 . شكل منحن بجوار نقطة عادية أو شاذة. تبين المساواة 71.16 (1) ان كل منحن L معادلته $x = x(t)$ يطابق مماسه، عندما يكون $x'(t) \neq 0$ ، تطابقا بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الاولى بالنسبة لـ Δt . اما المساواة 71.16 (2) فتبين ان المنحنى L يقع في المستوى المعرف بالشعاعين $x'(t)$ و $x''(t)$ وهذا بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الاولى؛ يسمى هذا المستوى حسب التعريف 71.16 - ب (في الحالة التي يكون فيها $x'(t)$ و $x''(t)$ مستقلين خطيا) المستوى الملاصق للمنحنى عند النقطة M . إذا كان ξ و η هما الاحداثيتين في المستوى الملاصق بالنسبة للأساس $x'(t)$ ، $x''(t)/2$ ، فإننا نحصل انطلاقا من 71.16 (2) على التمثيل الوسيطى للمنحنى L بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثانية:

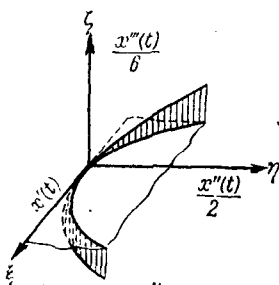
$$\xi = \Delta t, \quad \eta = (\Delta t)^2$$

إذن فإنه يأتي من التوضيح الوارد بأن المنحنى L قطع مكافئ في المستوى الملاصق معادلته $\eta = \xi^2$.

يسمى الفضاء الجزئي المعرف بالاشعة $x'(t)$ ، $x''(t)/2$ ، $x'''(t)/6$ (في

حالة استقلالها الخطي) الفضاء الجزئي الملاصق الثلاثي البعد للمنحنى L عند النقطة M (71.16 - ب). نرى في (3) 71.16 ان المنحنى L يقع، بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثالثة، في الفضاء الجزئي الملاصق الثلاثي البعد المنسوب اليه. إذا كانت ξ ، η ، ζ هي الاحداثيات في هذا الفضاء الجزئي بالنسبة للأساس $x'(t)/2$ ، $x''(t)/6$ فإننا نستنتج من نفس المساواة (3) 71.16 التمثيل الوسيطى للمنحنى L بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثالثة:

$$\xi = \Delta t, \quad \eta = (\Delta t)^2, \quad \zeta = (\Delta t)^3$$



الرسم 2.16

نحصل على منحنى ايسري (الرسم 2.16) إن مسقطه على مستوى الاحداثيات ξ ، η هو القطع المكافئ الذي سبق اعتباره $\eta = \xi^2$. اما مسقطه على مستوى الاحداثيات ξ ، ζ فهو المنحنى من الدرجة الثانية $\zeta = \xi^3$ (الذي ننظر اليه انطلاقا من نهاية الشعاع $\frac{1}{2}x'(t)$). واما مسقطه على مستوى الاحداثيات η ، ζ فهو القطع المكافئ نصف المكعب $\zeta = \eta^{3/2}$ (الذي ننظر اليه انطلاقا من نهاية الشعاع $x'(t)$).

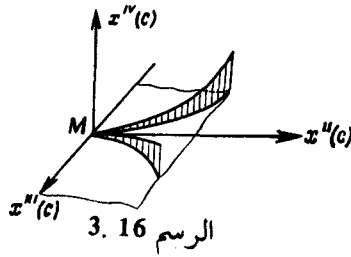
نعتبر الآن المنحنى L بجوار نقطة شاذة c ، حيث $x'(c) = 0$ لكن $x''(c) \neq 0$ و $x'''(c) \neq 0$. يعطينا دستور تايلور عندئذ:

$$\Delta x(c) = \frac{1}{2} x''(c) \Delta t^2 + \frac{1}{6} x'''(c) \Delta t^3 + e_3(t) \Delta t^4$$

وهكذا نرى، بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثالثة، ان المنحنى L يقع في المستوى المعرف بالشعاعين $x''(c)/2$ ، $x'''(c)/6$ ومعادلته في هذا المستوى هي $\zeta = \eta^{3/2}$. إذا احتفظنا باللامتناهيات في الصغر من

الرتبة الرابعة فإن ذلك يضيف الحد المكمل $\frac{1}{24}x^{IV}(c)\Delta t^4$ (من اجل $x^{IV}(c) \neq 0$) الذي يثبت ان المنحنى يبتعد عن المستوى $x^{IV}(c)$, $x'''(c)$, $x''(c)$ في نصف الفضاء المشار اليه بالشعاع $x^{IV}(c)$ (الرسم 3.16). نلاحظ انه بما ان اشارة Δt^4 ثابتة فإن فرعي النقطة الرأسية يبتعدان عن المستوى في نفس نصف الفضاء.

وهكذا نرى في حالة نقطة شاذة c حيث $x'(c) = 0$ و $x''(c) \neq 0$, $x'''(c) \neq 0$, ان النقطة الشاذة M نقطة رجوع.



91.16 . طول قوس . قدم تعريف طول قوس منحنى $x(t)$ في 36.9 . نعيد تقديم هذا التعريف ونستنتج منه الدستور المقابل المتعلق بمنحنى في فضاء نظيمي كيني . عرفنا طول قوس منحنى كنهاية اطوال الخطوط المضلعية المرسومة من داخل المنحنى عندما يتصاغر طول كل قطعة مستقيمة لا نهائياً . بعبارة أدق، لتكن :

$$\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

تجزئة للمجال $[a, b]$ مع العلم ان هناك تابعا $x(t)$ معرفا على $[a, b]$. تقابل كل نقطة t_i نقطة $M_i = x(t_i)$ من المنحنى . بوصل النقاط M_i بقطع مستقيمة نحصل على خط مضلعي L_{Π} طوله هو $\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta x_i|$. نفرض ان التابع $x(t)$ قابل للاشتقاق باستمرار لا نهائياً على المجال $[a, b]$. حينئذ :

$$\Delta x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t) dt = x'(t_i) \Delta t_i + \varepsilon_i \Delta t_i,$$

حيث:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [x'(t) - x'(t_i)] dt;$$

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{\Pi} \equiv \max_{|t-\bar{t}| \leq d(\Pi)} |x'(t) - x'(\bar{t})|$$

نظرا للإستمرار المنتظم للتابع $x'(t)$ فإن هذه الكمية تؤول الى

الصفر من اجل تقسيم لا متناه للتجزئة Π . لدينا إذن التقدير:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta x_i| - \sum_{i=0}^{n-1} |x'(t_i)| \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| \Delta t_i \leq \varepsilon_{\Pi} (b-a)$$

ثم إن المجموع $\sum_{i=0}^{n-1} |x'(t_i)| \Delta t_i$ يؤول، من اجل تقسيم لا متناه

للتجزئة Π ، الى النهاية

$$(1) \quad \int_a^b |x'(t)| dt,$$

لأن التابع العددي $|x'(t)|$ يكون مستمرا بمجرد ان يكون التابع

الشعاعي $x'(t)$ مستمراً. ومنه يأتي ان نهاية اطوال الخطوط المضلعية

المرسومة من داخل المنحنى موجودة وتساوي التكامل (1). نلاحظ ان

لدينا في الفضاء R_n ، $|x'(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^n [x'_k(t)]^2}$ ، وهو الدستور المقابل للدستور

الذي وجدناه في 36.9 (5)، كما نلاحظ خلافا لـ 36.9 (5) ان العبارة (1)

قائمة في كل فضاء نظمي.

إذا عوضنا b بـ t و t بـ τ نحصل على العبارة الخاصة بطول قوس

$$\text{منحنى } L \text{ باعتبار المجال } [a, t] \text{ كمجال تغير الوسيط } \tau : \\ s(t) = \int_a^t |x'(\tau)| d\tau$$

نرى ان $s(t)$ تابع غير متناقص لـ t ومستمر وقابل للإشتقاق؛

زيادة على ذلك، لدينا:

$$s'(t) = |x'(t)|$$

وذلك حسب 13.9.

إذا لم تكن للمنحنى L نقاطا شاذة، أي إذا لم ينعدم $x'(t)$ عند

اية نقطة، فإننا نستطيع تطبيق النظرية الخاصة بالتابع المقلوب؛ يوجد إذن

تابع مقلوب $t = t(s)$ مستمر ومتزايد وقابل للإشتقاق باستمرار. بعد ذلك يمكننا وضع التابع $x(t)$ على شكل تابع لـ s ، مستمر وقابل للإشتقاق باستمرار. يسمى طول القوس s وسيطا طبيعياً. إذا اعطي المنحنى L بتابع $x = x(s)$ للوسيط الطبيعي s فإن:

$$|x'(s)| = s'(s) = 1$$

وذلك بفضل (1).

وهكذا نحصل عند كل نقطة غير شاذة للمنحنى L على ان الشعاع $x'(s)$ طوله 1. (هذا امر واضح من وجهة النظر الحركية: إذا مثل الوسيط s في آن واحد المسافة المقطوعة والزمن المستغرق في ذلك فإن سرعة الحركة تساوي الوحدة.)

§ 16.2. الانحناء، الانحناءات من الرتب العالية.

12.16. نهم فيما يلي ليس باطوال الاشعة فحسب بل بالزوايا التي تشكلها هذه الاشعة أيضاً. من الطبيعي إذن ألا نعتبر فضاء نظيمياً كيفياً بل نعتبر فضاء هيلبرتيا (12.14).

توطئة. ليكن $x(t)$ و $y(t)$ ($a \leq t \leq b$) تابعين قابلين للاشتقاق قيمهما في فضاء هيلبرتي H ؛ يكون عندئذ التابع العددي $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ قابلاً للإشتقاق ايضاً، ولدينا:

$$(1) \quad \varphi'(t) = (x'(t), y(t)) + (x(t), y'(t))$$

البرهان. لدينا:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - (x(t), y(t)) = \\ &= (x(t) + x'(t)\Delta t + \varepsilon_1\Delta t, y(t) + \\ &+ y'(t)\Delta t + \varepsilon_2\Delta t) - (x(t), y(t)) = \\ &= [(x'(t), y(t)) + (x(t), y'(t))] \Delta t + \varepsilon_3\Delta t, \end{aligned}$$

حيث $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(t, \Delta t) \rightarrow 0$ لما $\Delta t \rightarrow 0$. يمكننا إذن عزل الجزء

الخطي للتزايد $\Delta\varphi$. إذا كتبنا ذلك صراحة فإننا نحصل على الدستور (1).

نتيجة. إذا بقى طول الشعاع $x(t)$ ثابتا عندما يتغير t ، فإن الشعاع

$x'(t)$ والشعاع $x(t)$ متعامدان.

ذلك ان تطبيق دستور الاشتقاق (1) على $(x(t), x(t))$ يعطي:

$$0 = (x(t), x(t))' = 2(x(t), x'(t))$$

وهو المطلوب.

22. 16. نعتبر منحنيا $L = \{x = x(s)\}$ وسيطه هو طول قوس محسوبا ابتداء من نقطة ثابتة. كما رأينا في 91. 16 فإن الشعاع $e_1(s) = x'(s)$ واحدي.

إن كان الشعاعان $x'(s)$ و $x''(s)$ مستقلين خطيا فإنه يوجد مستو ملاصق. ينتمي الشعاع $e_1'(s) = x''(s)$ الى المستوى الملاصق وهو، كما رأينا، عمودي على $e_1(s)$. يسمى ذلك الشعاع شعاع انحناء المنحنى L عند النقطة s . نضع

$$(1) \quad e_1'(s) = \kappa(s) e_2(s)$$

حيث $e_2(s)$ شعاع واحد عمودي على $e_1(s)$ ، والمعامل $\kappa(s)$ موجب. لدينا:

$$(2) \quad \kappa(s) = |e_1'(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{e_1(s + \Delta s) - e_1(s)}{\Delta s} \right|$$

إن طويلة فرق الشعاعين الواحديين $e_1(s + \Delta s)$ و $e_1(s)$ هي وتر دائرة الوحدة وتمثل لامتناهيا في الصغر يكافيء الزاوية التي يشكلها هذان الشعاعان، أي زاوية مماسي المنحنى L عند النقطتين المنسوبتين للقيمتين s و $s + \Delta s$ على التوالي. وهكذا فإن المعامل $\kappa(s)$ يعطي سرعة دوران المماس بالنسبة لتغير طول القوس. يسمى العدد $\kappa(s)$ انحناء المنحنى L عند النقطة s .

نشير الى ان الدستور (2) يمثل تعريفا اعم من الدستور (1) لأن (2) لا يتطلب الشرط $e_1'(s) \neq 0$ ، يكفي ان يكون $e_1'(s)$ موجوداً. في الحالة التي يكون فيها $e_1'(s) = 0$ فإن الدستور (2) يعطي انحناء منعداً في النقطة المعتررة.

32. 16 . لنستنتج الدستور المتعلق بالانحناء في الحالة التي يكون فيها المنحنى L معطى بمعادلة $x = x(t)$ حيث t كيفي. بما أن

$s_t = |x_t| = \sqrt{(x_t, x_t)}$ حسب (91. 16) فإن:

$$s_{tt} = \frac{(x_t, x_{tt})}{\sqrt{(x_t, x_t)}} = \frac{(x_t, x_{tt})}{|x_t|}$$

وذلك حسب التوطئة 12. 16 .

لدينا بعد ذلك :

$$\begin{aligned} x_s &= x_t t_s, \quad x_{ss} = x_{tt} t_s^2 + x_t t_{ss} = \frac{x_{tt}}{s_t^2} + x_t \left(\frac{1}{s_t} \right)_t \frac{1}{s_t} \\ &= \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t}{s_t^2} \frac{s_{tt}}{s_t} = \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t (x_t, x_{tt})}{|x_t|^4} \end{aligned}$$

واخيراً

$$\kappa(s) = |x_{ss}| = \left| \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t (x_t, x_{tt})}{|x_t|^4} \right|$$

يعتمد هذا الدستور على التعريف 22. 16 (2). وبالتالي فهو قائم في

الحالتين $\kappa(s) \neq 0$ و $\kappa(s) = 0$

بنقل قيمة الانحناء في دستور تايلور 71. 16 (2) (مع $e_1(s) \neq 0$)

يصبح هذا الاخير.

$$\begin{aligned} \Delta x(s) &= x'(s) \Delta s + x''(s) \frac{\Delta s^2}{2} + e_2(s) \Delta s^2 = \\ (2) \quad &= e_1(s) \Delta s + \frac{1}{2} \kappa(s) e_2(s) \Delta s^2 + e_2(s) \Delta s^2 \end{aligned}$$

42. 16 . لنحسب انحناء الدائرة. باستخدام الاحداثيات المرتبطة بمستوى

الدائرة، تكتب معادلة الدائرة على الشكل :

$$x(t) = \{R \cos t, R \sin t\}$$

بالاشتقاق نحصل على :

$$\begin{aligned} x_t &= \{-R \sin t, R \cos t\}, \quad |x_t| = R, \\ x_{tt} &= \{-R \cos t, -R \sin t\}, \quad (x_t, x_{tt}) = 0 \end{aligned}$$

$$\kappa(s) = \frac{|x_{tt}|}{|x_t|^2} = \frac{1}{R}, \quad \text{ومنه يأتي:}$$

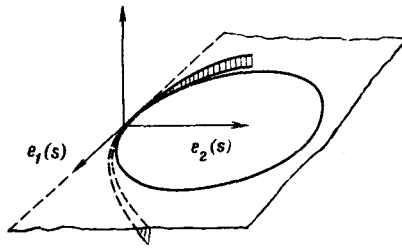
وبالتالي فإن انحناء الدائرة هو مقلوب نصف قطرها.

52. 16. ليكن الآن $L = \{x = x(s)\}$ منحنيا ايسريا. إذا اعتبرنا في المستوى الملاصق دوائر مختلفة ماسة للمنحنى L ، فإن الانحراف بين نقطة من المنحنى والنقطة المقابلة لها على كل دائرة Q هو عموما من الرتبة الثانية في الصغر بالنسبة لـ Δs . نحاول، باختيار مناسب لنصف قطر الدائرة الماسة الحصول على انحراف من الرتبة الثالثة بدل الثانية. لتكن $z = z(s)$ معادلة دائرة ماسة، بالوسيط الطبيعي s وبشعاع انحناء اتجاهه هو الاتجاه الخاص بـ L (الرسم 4. 16). لدينا عندئذ حسب الدستور 32. 16 (2):

$$\Delta x(s) = e_1(s) \Delta s + \frac{1}{2} \kappa(s) e_2(s) \Delta s^2 + \bar{e}_2 \Delta s^3,$$

$$\Delta z(s) = e_1(s) \Delta s + \frac{1}{2R} e_2(s) \Delta s^2 + \bar{e}_2 \Delta s^3,$$

حيث e_2 و \bar{e}_2 لا متناهيان في الصغر لما $\Delta s \rightarrow 0$ ؛ تُحل المسألة المطروحة إذن إذا وضعنا $R = \frac{1}{\kappa(s)}$. إن الدائرة الماسة الواقعة في المستوى الملاصق للمنحنى L ، عند النقطة s والتي لها شعاع انحناء اتجاهه هو الاتجاه الخاص بـ L ، ونصف قطرها $R = \frac{1}{\kappa(s)}$ ، تسمى الدائرة الملاصقة ويسمى مركزها مركز انحناء المنحنى L عند النقطة s . يسمى العدد $R = \frac{1}{\kappa(s)}$ نصف قطر انحناء المنحنى L عند النقطة s . إن كان المنحنى L دائرة فإن نصف قطر انحنائه يطابق حسب 42. 16 نصف قطره المعتاد



الرسم 4. 16

62. 16. الاساس الطبيعي. نفرض من اجل كل نقطة معطاة M من المنحنى L ان الاشعة: $x'(s), x''(s), \dots, x^{(m)}(s)$ موجودة ومستقلة خطيا. عندئذ توجد عند هذه النقطة الفضاءات الجزئية الملاصقة:

$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n$ ابعادها على التوالي: $1, 2, \dots, n$. نشيء
 اساسا متعامدا ومتجانسا للفضاء E_n . نختار في البداية الشعاعين اللذين تم
 إنشاؤهما: $e_1(s) = x'(s)$ و $e_2(s) = \frac{x''(s)}{|x''(s)|}$. اما الشعاع الثالث
 $e_3(s)$ الذي نختاره في الفضاء الجزئي E_3 فيجب ان يكون عمودياً على
 المستوى E_2 وله اتجاه الشعاع $x'''(s)$ بالنسبة لهذا المستوى. بطريقة
 مماثلة، بعد اختيار الـ $m-1$ شعاعا $e_1(s), \dots, e_{m-1}(s)$ ، نشيء
 في الفضاء الجزئي E_m الشعاع $e_m(s)$ العمودي على الفضاء الجزئي
 E_{m-1} والذي له اتجاه الشعاع $x^{(m)}(s)$ بالنسبة لهذا الفضاء الجزئي.
 تعين هذه الشروط بكفية وحيدة الاساس $e_1(s), \dots, e_n(s)$. يتبين
 من هذا الانشاء ان كل شعاع $e_m(s)$ عبارة خطية من الاشعة
 $x'(s), \dots, x^{(m)}(s)$:

$$(1) \quad e_m(s) = \varphi_1(s) x'(s) + \dots + \varphi_m(s) x^{(m)}(s)$$

حيث $\varphi_m(s) > 0$.

يسمى الاساس $e_1(s), \dots, e_n(s)$ الاساس الطبيعي للمنحنى L
 عند النقطة M . من الواضح ان هذا الاساس يتغير موقعه بتغير النقطة M .

72. 16. دساتير فريني (Frénet). لنبحث عن دساتير اشتقاق اشعة
 الاساس الطبيعي لمنحن $L \subset R_n$ بالنسبة للوسيط s . باشتقاق المساواة
 62. 16 (1) وباستخدام القاعدة 16. 12 - ص نجد:

$$e'_m(s) = \sum_{j=1}^m \varphi'_j(s) x^{(j)}(s) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(s) x^{(j+1)}(s)$$

وبالتالي ينتمي الشعاع $e'_m(s)$ (من اجل $m < n$) الى الفضاء الجزئي
 E_{m+1} ومنه:

$$(2) \quad e'_m(s) = a_{m1}(s) e_1(s) + \dots + a_{mm}(s) e_m(s) + a_{m, m+1}(s) e_{m+1}(s)$$

من اجل $m = n$ فإن الدستور (2) قائم عندما نعوض e_{n+1} بـ 0 .
 نستنتج من (1) و (2) و 62. 16 (1) بسهولة ان:

$$a_{m, m+1} = \varphi_m(s) > 0$$

اما المعاملات الاخرى في (2) فهي تحسب

$e_{m-1}(s)$ (وهي تحدد دوران الفضاء الجزئي E_m في نفسه) والثانية وفق الشعاع $e_{m+1}(s)$ (وهي توافق الدوران في الاتجاه العمودي على E_m)، يمثل المعامل κ_m سرعة هذا الدوران الاخير (زاوية الدوران المنسوبة الى القوس المرسوم). وهكذا فإن الالتواء هو سرعة دوران المستوى الملاصق للشعاع e_2 نحو الشعاع e_3 .

يمكن إذن فهم العدد κ_m على انه سرعة دوران الفضاء الجزئي E_m في الاتجاه العمودي عليه، كما ان الانحناء κ_1 يمثل هندسيا سرعة دوران المماس (16.22(1)). كما هو الحال بالنسبة للتعريف الاخير، فإن التعريف الهندسي لـ κ_m اعم من التعريف المعتمد على دساتير فريني ويتطلب أن يكون الفضاء E_{m+1} غير منحل: إنه لا يتطلب سوى عدم انحلال الفضاء E_m ووجود المشتق $x^{(m+1)}(s)$. إذا كان $x^{(m+1)}(s) = 0$ فإن الفضاء E_m له سرعة دوران منعدمة عند النقطة المعتبرة، ويعطي التعريف الهندسي لـ κ_m قيمة منعدمة.

82.16. حساب الانحناءات ذات الرتب العالية. من وجهة النظر الجبرية يُعرف الجداء المختلط لـ n شعاعا a_1, \dots, a_n في فضاء اقليدي، يرمز لهذا الجداء بـ $[a_1, \dots, a_n]$ ، على انه عدد يساوي حجم متوازي الوجوده، ذي البعد n ، الذي ينشأ على هذه الاشعة. إذا عبرنا عن الاشعة a_1, \dots, a_n بدلالة احداثياتها ضمن اساس متعامد ومتجانس فإن العدد $[a_1, \dots, a_n]$ يساوي المعين ذي الرتبة n الذي تتشكل اعمدته من احداثيات الشعاع الموافق لرقم العمود [14؛ 8؛ 47].

لنحسب الجداء المختلط للأشعة $x_s, x_{ss}, \dots, x_s^{(n)}$. نستعمل لهذا الغرض الدساتير:

$$\begin{aligned} x_s &= x_{tt}t_s, \\ x_{ss} &= \dots + x_{tt}t_s^2, \\ &\dots \\ x_s^{(n)} &= \dots + x_t^{(n)}t_s^n \end{aligned}$$

وهي تعبر عن المشتقات بالنسبة لـ s بدلالة المشتقات بالنسبة لأي

فنحصل على:

$$(5) \quad x_1 x_2 \dots x_{n-1} = \frac{[x_t, \dots, x_t^{(n)}]}{[x_t, \dots, x_t^{(n-1)}] |x_t|} \cdot 1$$

ثم إذا قسمنا هذا الدستور طرفا طرفا على الدستور المماثل:

$$x_1 x_2 \dots x_{n-2} = \frac{[x_t, \dots, x_t^{(n-1)}]}{[x_t, \dots, x_t^{(n-2)}] |x_t|} \cdot 1$$

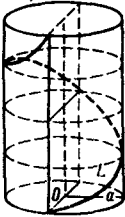
نحصل على:

$$x_{n-1} = \frac{[x_t, \dots, x_t^{(n)}] [x_t, \dots, x_t^{(n-2)}]}{[x_t, \dots, x_t^{(n-1)}]^2 |x_t|}$$

يعني ذلك هندسيا ان الانحناء x_{n-1} يساوي، بتقدير عام $|x_t|$ ، نسبة ارتفاع متوازي الوجوه ذي البعد n (المنشأ على الاشعة $(x_t, \dots, x_t^{(n)})$ على الاشعة $(x_t, \dots, x_t^{(n-1)})$).

مثال. نبحث عن انحناء والتواء حلزون في الفضاء الثلاثي البعد. يعرف حلزونا (الرسم 5.16) بالمعادلة:

$$x(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$$



الرسم 5.16

نحصل بالاشتقاق على:

$$\begin{aligned} x_t &= \{-a \sin t, a \cos t, b\}, \quad |x_t| = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x_{tt} &= \{-a \cos t, -a \sin t, 0\}, \quad (x_t, x_{tt}) = 0, \\ x_{ttt} &= \{a \sin t, -a \cos t, 0\}, \quad [x_t, x_{tt}, x_{ttt}] = a^2 b \end{aligned}$$

وينتج من ذلك حسب الدستور (4) أن:

$$x_1 = \frac{|x_{tt}|}{|x_t|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

اخيرا بالنظر الى الدستور (3) يأتي:

$$x_1^2 x_2 = \frac{[x_t, x_{tt}, x_{ttt}]}{|x_t|^6} = \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)^3}, \quad x_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

§ 16 3 الخلال الاساس الطبيعي .

13. 16 . عرفنا ضمن 71. 16 الفضاءات الجزئية الملاصقة $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n$ للمنحنى $x = x(t)$ في الحالة التي تكون فيها الاشعة $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ موجودة ومستقلة خطيا. نعتبر الحالة التي يكون هذا الشرط الاخير غير متوفر .

إذا أصبحت الاشعة $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ غير مستقلة خطيا عند نقطة t مع بقاء الاشعة $x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ مستقلة خطياً فإن الفضاء E_n غير موجود على الرغم من بقاء وجود الفضاء E_{n-1} . تفقد الكمية $\kappa_n(t)$ معناها وكذلك الامر فيما يخص الشعاع $e_n(t)$. نستطيع محاولة انشاء الشعاع $e_n(t)$ بالاستمرار وذلك بالانتقال الى النهاية $t \rightarrow \bar{t}$ في $e_n(\bar{t})$ (عندما تكون $x'(\bar{t}), \dots, x^{(n)}(\bar{t})$ مستقلة خطياً) لكنه يمكن ان يؤدي الانتقال الى النهاية وفق $t \nearrow \bar{t}$ (متزايدة) ووفق $t \searrow \bar{t}$ (متناقصة) الى قيمتين مختلفتين. لتكن C ، مثلا ، نقطة انعطاف منحن مستو (الرسم 6. 16)؛ عندئذ يتحول الشعاع $e_2(t)$ فجأة عند المرور بهذه النقطة الى مقابله. نصلح على اتمام تعريف التوابع $\kappa_1(t), \dots, \kappa_n(t)$ بوضع قيمها مساوية للصفر في النقاط التي تكون فيها هذه التوابع غير معرفة؛ نلاحظ ان ذلك يتماشى مع اعتبارات 72. 16 .

23. 16 . مثال . ليكن مستقيما معرفا بالمعادلة

$$(1) \quad x(t) = x_0 + tx_1$$

$$(2) \quad \text{ينتج من (1) ان: } x'(t) = x_1 \text{ و } x''(t) = 0$$

وعليه فإن المستوى الملاصق غير موجود؛ وبالتالي فإن انحناء مستقيم انحناء منعدم حسب اصطلاحنا .

بالعكس ، نفرض ان انحناء منحن $x = x(t)$ مطابق للصفر أي ان

الشعاعين $x'(t)$ و $x''(t)$ غير مستقلين خطياً (و $x'(t) \neq 0$).
 لنثبت أن هذا المنحنى مستقيم. إن عدم الاستقلال الخطي للشعاعين
 $x'(t)$ و $x''(t)$ يعني $x''(s) = 0$ لأن $x''(s)$ يكتب على شكل
 عبارة خطية لـ $x'(t)$ و $x''(t)$ وهو عمودي على $x'(t)$. حينئذ
 يكون $x'(s)$ شعاعاً ثابتاً (حسب النظرية المثبتة في 16.12 - ق: إذا
 كان مشتق تابع شعاعي مطابقاً للصفر فإن التابع ثابت) وواحدياً، كما هو
 الحال لكل شعاع من الشكل $x'(s)$. نرمز له بـ x_1 ، $|x_1| = 1$.
 بمكاملة المعادلة $x'(s) = x_1$ وبمراعاة وحدانية الحل (الناتج دوماً من
 النظرية 16.12 - ق) نجد:

$$x(s) = x_0 + sx_1$$

وهو المطلوب.

33. 16. هناك حالة أكثر تعقيداً وهي الحالة التي يقع فيها المنحنى باكملة
 في مستو مصعد بعده n . يحوي هذا المستوى المصعد كل الأشعة
 $x'(t), x''(t), \dots, x^{(n+1)}(t)$ وبالتالي فإن الأشعة
 غير مستقلة خطياً. إذن فإن الانحناء $x_n(t)$ وكذا كل الانحناءات
 الموالية منعدمة. لنثبت أن القضية العكسية قائمة: إذا كان الانحناء من الرتبة
 n لمنحنى L مطابقاً للصفر، فإن كل المنحنى L يقع في مستو مصعد بعده
 n .

يعني الفرض أن الأشعة $x'(t), \dots, x^{(n+1)}(t)$ غير مستقلة
 خطياً من أجل كل t ، $a \leq t \leq b$:

$$(1) \quad x^{(n+1)}(t) = a_0(t)x'(t) + \dots + a_{n-1}(t)x^{(n)}(t)$$

نفرض أن الأشعة $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ تبقى مستقلة خطياً على
 كل المجال $a \leq t \leq b$. يمكننا إذن إثبات أن كل المعاملات $a_n(t)$
 في (1) مستمرة بمجرد استمرار التابع $x^{(n+1)}(t)$. بالفعل، بضرب
 المساواة (1) سلمياً في $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ نحصل على جملة معادلات

خطية بالنسبة للمعاملات :

$$(x^{(n+1)}(t), x'(t)) = a_0(t)(x_t, x_t) + \dots + a_{n-1}(t)(x_t^{(n)}, x_t),$$

$$(x^{(n+1)}(t), x^{(n)}(t)) = a_0(t)(x_t, x_t^{(n)}) + \dots + a_{n-1}(t)(x_t^{(n)}, x_t^{(n)})$$

إن كل معاملات هذه الجملة مستمرة (كجداءات سلمية لتتابع مستمرة)، اما معيها فهو غير منعدم بصفته معين غرام (Gramm) لجملة اشعة مستقلة خطيا [17.8؛ 14]. ينتج من دساتير كرامر (Cramer) المتعلقة بالحلول $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ ان هذه الحلول مستمرة على $[a, b]$

يوجد بفضل 56.13 حل $y(t)$ للمعادلة

$$(2) \quad y^{(n)}(t) = a_0(t)y(t) + \dots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)$$

ينتمي، حسب 66.13، الى الفضاء الجزئي المولد عن الاشعة:

$$y_0 = x'(a), \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}(a)$$

$$y_{n-1} = x^{(n)}(a), \dots$$

التي تعطي (1) بعد التعويض $x'(t) = y(t)$ والشروط الابتدائية المشار اليها، فإن الشعاع $x'(t)$ يبقى حسب 66.13، في الفضاء الجزئي المولد عن الاشعة $x'(a), \dots, x^{(n)}(a)$ من اجل كل t ينتمي الشعاع:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\xi) d\xi$$

من اجل كل $t \in [a, b]$ الى المستوى المصعد المار بالنقطة $x(a)$

الموازي للفضاء المحصل عليه. بذلك اثبتنا النظرية التالية:

نظرية. ليكن $L = \{x = x(t)\}$ منحنيا في فضاء هيلبيري H . نفرض

ان الاشعة $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ مستقلة خطيا والاشعة

$x'(t), \dots, x^{(n+1)}(t)$ غير مستقلة خطيا، وذلك من اجل كل

$t \in [a, b]$. عندئذ ينتمي المنحنى L الى المستوى المصعد المار بالنقطة

$$x(a), \dots, x^{(n)}(a)$$

بصفة خاصة، اذا كان الالتواء $\kappa_2(t)$ للمنحنى L مطابقا للصفر والانعحاء غير منعدم فإن المنحنى L منحن مستو.

§ 16. 4. المعادلات الطبيعية

14. 16. ليكن L منحنيا و s وسيطه الطبيعي. يمكننا اعتبار كل الانحناءات كتتابع لـ s :

$$\kappa_1 = \kappa_1(s), \kappa_2 = \kappa_2(s), \dots, 0 \leq s \leq s_0$$

نسلم بانعدام الانحناءات اي وجود الانحلال الوارد في 13. 16.

اذا استنتج منحن \bar{L} من المنحنى L بتحويل خطي ايزومتري (أي يحتفظ بكل المسافات) في الفضاء H فإن كل التوابع $\kappa_m(s)$ $m = 1, 2, \dots$ معينة تماما بالمسافة، وتبقى هي نفسها من اجل المنحنى \bar{L} . لنثبت ان القضية العكسية قائمة من اجل المنحنيات ذات الابعاد المنتهية:

نظرية. ليكن L و \bar{L} منحنين في الفضاء R_n ذي البعد n ممثلين بتوابع شعاعية قابلة للإشتقاق n مرة. اذا كانت الانحناءات $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)$ مستمرة وموجبة وتكتب بدلالة التوابع المطابقة للوسيط الطبيعي s فإنه يوجد تحويل ايزومتري (ازاحة قد تستكمل بتناظر) للفضاء R_n في نفسه يحول المنحنى L الى المنحنى \bar{L} .

البرهان. ليكن $e_1(s), \dots, e_n(s)$ الاساس الطبيعي للمنحنى L و $\bar{e}_1(s), \dots, \bar{e}_n(s)$ اساس \bar{L} . نعتبر ازاحة (قد يتبعها تناظر) للفضاء R_n تحوّل الموقع الابتدائي $\bar{e}_1(0), \dots, \bar{e}_n(0)$ للأساس الطبيعي لـ \bar{L} الى الموقع الابتدائي $e_1(0), \dots, e_n(0)$ للأساس الطبيعي لـ L ، بحيث ان $\bar{e}_1(0)$ يصبح $e_1(0)$ ، و \dots ، و $\bar{e}_n(0)$ يصبح $e_n(0)$. لنثبت ان هذا التحويل للفضاء R_n يحوّل \bar{L} الى L .

إن التوابع $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)$ مستمرة فرضا. يوجد

ب. انحناءات المتوالية بدلالة طول القوس : $x = x(s)$

$$\varphi_1(s) = \kappa_1(s), \dots, \varphi_{n-1}(s) = \kappa_{n-1}(s)$$

ب. نثبت في البداية التوطئة العامة التالية:

توطئة: نعتبر في R_n المعادلة الشعاعية

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t)$$

حيث $A(t)$ مؤثر لا متناظر (أي ان كل عناصر المصفوفة

$$A(t) = \|a_{jk}(t)\| \text{ تغير اشارتها بعد ابدال: } a_{jk}(t) = -a_{kj}(t).$$

إن المصفوفة الحالة $\Omega_{t_0}^t$ متعامدة (أي ان المصفوفة المنقولة لـ

$$\Omega_{t_0}^t \text{ مطابقة لمصفوفتها المقلوبة})$$

البرهان. رأينا في 83.13 - ر ان المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ يحقق المعادلة:

$$(1) \quad \frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} = A(t)\Omega_{t_0}^t$$

مع الشرط الابتدائي $\Omega_{t_0}^{t_0} = I$. من جهة اخرى، لدينا حسب 83.13

- د

$$\Omega_{t_0}^t \Omega_{t_0}^{t_0} = I$$

باشتقاق هذه المساواة بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} \Omega_{t_0}^{t_0} + \Omega_{t_0}^t \frac{d\Omega_{t_0}^{t_0}}{dt} = 0$$

أو:

$$A(t)\Omega_{t_0}^t \Omega_{t_0}^{t_0} + \Omega_{t_0}^t \frac{d\Omega_{t_0}^{t_0}}{dt} = 0$$

ومنه:

$$\frac{d\Omega_{t_0}^{t_0}}{dt} \Omega_{t_0}^{t_0} = -\Omega_{t_0}^{t_0} A(t)$$

بالانتقال الى المؤثرات القرينة نجد [46.7 ، 14]

$$\frac{d(\Omega_{t_0}^{t_0})'}{dt} = -A'(t)(\Omega_{t_0}^{t_0})'$$

نستعمل الآن الشرط $A'(t) = -A(t)$ لنجد:

$$\frac{d(\Omega_{t_0}^{t_0})'}{dt} = A(t)(\Omega_{t_0}^{t_0})'$$

نقارن هذه المعادلة بـ (1) ونظرا لكون المؤثر $(\Omega_{t_0}^{t_0})'$ يحقق نفس

في $[0, s_0]$.

د . نواصل بوضع :

$$x(s) = \int_0^s y_1(\sigma) d\sigma$$

نحصل على منحني L في الفضاء R_n ذي البعد n . بما أن :

$$|x'(s)| = |y_1(s)| = 1$$

إن الأشعة $y_1(s), \dots, y_m(s)$ متعامدة ومتجانسة من اجل كل

$$m = 1, 2, \dots, n \quad \text{وتكتب} \quad x^{(m)}(s) = y_1^{(m-1)}(s)$$

خطياً بدلالة $y_1(s), \dots, y_m(s)$ وذلك حسب الجملة (3) مع العلم أن معامل

$y_m(s)$ موجب (يساوي $\varphi_{m-1}(s)$) ؛ وبالتالي فإن الأشعة

$y_1(s), \dots, y_n(s)$ هي أشعة الاساس الطبيعي للمنحني L من اجل

كل s . الآ أن لدينا دساتير فريني 72.16 (5) بخصوص أشعة أساس

$$y_1'(s) = \kappa_1(s) y_2(s) \quad \text{طبيعي :}$$

$$y_2'(s) = -\kappa_1(s) y_1(s) + \kappa_2(s) y_3(s)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{n-1}'(s) = -\kappa_{n-1}(s) y_n(s)$$

بمقارنة هذه الدساتير بالمعادلات (3) نتوصل على التوالي الى العلاقات :

$$\varphi_1(s) \equiv \kappa_1(s), \quad \varphi_2(s) \equiv \kappa_2(s), \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}(s) \equiv \kappa_{n-1}(s)$$

انتهى برهان النظرية .

§ 5.16 . الحلزونات

15.16 . أ . تعريف . الحلزون هو تعريفا منحني كل انحناءاته ثابتة .

ب . من البديهي أن المستقيم يتوفر فيه هذا الشرط (انحناءات المستقيم

منعدمة) . رأينا في المستوى (42.16) ان انحناء دائرة نصف قطرها R

ثابت ويساوي $\kappa = 1/R$ ؛ اما انحناءاتها العالية فهي منعدمة . وهكذا

يتوفر شرط التعريف السابق أيضا في الدائرة . لنثبت انه لا توجد حلزونات

اخرى في المستوى . إذا كان L منحنيا مستويا انحناءه ثابت $\kappa > 0$ ، نعتبر

بجانبه الدائرة Q التي نصف قطرها $1/\kappa$ والتي لها أيضا انحناء ثابت κ .
 يتبين من النظرية 14.16 اننا نستطيع جعل المنحنى L يطابق الدائرة Q ،
 وبالتالي فإن المنحنى L هو ايضا دائرة.

ج. اما في الفضاء الثلاثي البعد فإن الحلزون المعروف (« الكلاسيكي »)
 Q :

$$(1) \quad x_1 = a \cos t, \quad x_2 = a \sin t, \quad x_3 = bt$$

له، كما ورد في 82.16، انحناء والتواء ثابتان وهما يحسبان بواسطة

$$(2) \quad \kappa_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \kappa_2 = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad \text{الدستورين:}$$

وبالتالي فإن Q حلزون بمفهوم تعريفنا. لنثبت انه لا توجد حلزونات
 اخرى في R_3 . ليكن L حلزونا في R_3 بحيث $\kappa_1 > 0$ ، $\kappa_2 > 0$. ننطلق
 من (2) ونعين الوسيطين a و b بدلالة κ_1 و κ_2 ، من السهل ان نرى
 بأن:

$$a = \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}, \quad b = \frac{\kappa_2}{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$$

بعد ذلك ننشئ الحلزونة (1). انحناء هذا الحلزون هو κ_1 والتواؤه
 هو κ_2 . نستخدم النظرية 14.16 فنرى انه بالإمكان جعل المنحنى L
 مطابقا للحلزون (1) وهذا بازاحة في الفضاء R_3 ، وهو المطلوب.

25.16. لنبحث عن الحلزونات في فضاء بعده n . حلزون R_n هو
 منحنى انحناءاته $\kappa_1(s) = \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}(s) = \kappa_{n-1}$ ثابتة وغير
 منعدمة. تحقق الاشعة $e_1(s), \dots, e_n(s)$ جملة معادلات فريبي 72.16 (5):

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} e_1'(s) &= \kappa_1 e_2(s), \\ e_2'(s) &= -\kappa_1 e_1(s) + \kappa_2 e_3(s), \\ &\dots \dots \dots \\ e_{n-1}'(s) &= -\kappa_{n-2} e_{n-2}(s) + \kappa_{n-1} e_n(s), \\ e_n'(s) &= -\kappa_{n-1} e_{n-1}(s) \end{aligned} \right\}$$

مع العلم ان مصفوفة المعاملات مصفوفة ثابتة:

$$K = \begin{vmatrix} 0 & \kappa_1 & & & & \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ & & & & & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

لم نعتبر الكمية الا من اجل $n = 2m + 1$

فحصل بالمكاملة بالنسبة لـ s (ثوابت المكاملة التي تمثل الانسحابات

على طول كل محور نختارها منعدمة) على:

$$r(s) = \left(\frac{\sin \tau_1 s}{\tau_1} x_{11} - \frac{\cos \tau_1 s}{\tau_1} y_{11}, \frac{\cos \tau_1 s}{\tau_1} x_{11} + \frac{\sin \tau_1 s}{\tau_1} y_{11}, \dots, (z_{n1}s) \right)$$

يمكن كتابة هذه الدساتير بكيفية اكثر بساطة:

$$(6) \quad r(s) = (A_1 \cos \tau_1 (s-s_1), A_1 \sin \tau_1 (s-s_1), A_2 \cos \tau_2 (s-s_2), A_2 \sin \tau_2 (s-s_2), \dots, (C_n s))$$

من اجل n زوجي، $n=2m$ ، فان كل المنحنى L يوجد بطبيعة الحال على سطح الكرة:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2 = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_m^2$$

يكون المنحنى مغلقا وان كانت كل الاعداد τ_1, \dots, τ_m قابلة للقياس (اي إن كانت مضاعفات ناطقة لاحدها) ويكون غير مغلق (وليس له نقطة مزدوجة اي مضاعفة مرتين) إذا كان هناك على الاقل عددين τ_j و τ_k غير قابلين للقياس. من اجل $n = 2m + 1$ فإن المنحنى (6) ليس محدوداً؛ فهو يذهب الى لانهاية بالاحداثيات x_{2m+1}

لما $t \rightarrow +\infty$

35. 16. الحلزونات في الفضاءات ذات الابعاد غير المنتهية. نشير باديء ذي بدء الى الامر التالي. ليكن L منحنيا في R_n نفرض، من اجل كل نقطة معطاة A (المصدر) ونقطة اخرى p على هذا المنحنى، انه توجد ازاحة للفضاء (قد تتبع بتناظر) تحوّل المنحنى L الى نفسه وهذا بالاحتفاظ باتجاه تغير الوسيط وبتحويل النقطة A الى النقطة p . عندئذ، بما ان كل ازاحة للفضاء تحتفظ بالمسافة فان كل الانحناءات المنحنى L عند النقطتين A و p متساوية على التوالي هذا إن كان المنحنى مرنا بكفاية). بما ان النقطة p كيفية فإن كل الانحناءات للمنحنى L ثابتة؛ وبالتالي فالامر يتعلق بحلزون. وبالعكس، من اجل كل نقطتين A و p لحلزون L

معطى في R_n ، يوجد بفضل 14.16 ازاحة للفضاء R_n (قد تتبع بتناظر) تحويل الحلزون L الى نفسه وذلك بالاحتفاظ باتجاه تغير الوسيط وبتحويل النقطة A الى P .

وهكذا يقودنا الامر الى تعريف جديد للحلزون؛ إنه منحنى L يمكن تحويله الى نفسه بازاحة للفضاء (قد ترفق بتناظر) تحتفظ باتجاه تغير الوسيط ويحول نقطة A معطاة على L الى نقطة اخرى P معطاة على L . نلاحظ ان هذا التعريف لا يتطلب من L اية قابلية اشتقاق نقول عن منحنى يتمتع بالخاصية المذكورة انه متطابق ذاتيا. يمكن البرهان في R_n على ان صنف الحلزونات مطابق لصنف المنحنيات المتطابقة ذاتياً (انظر التمرين 2) .

يتضح في فضاء ذي بعد غير منته، انه توجد منحنيات متطابقة ذاتيا ومستمرة، لكنها بدون مماس. نقتصر هنا على مثال لمنحنى متطابق ذاتيا في الفضاء الهيلبرتي، لكنه من نوع خاص.

مثال (« لولب فينار Wiener »). نعتبر الفضاء $H_2(0, \infty)$ المشكل من التتابع $x(\tau)$ الحقيقية المستمرة بتقطيع على نصف المستقيم $0 \leq \tau < \infty$ التي تنعدم خارج مجال $[0, a]$ (يتعلق بالتابع $(x(\tau))$). نزود هذا الفضاء بجداء سلمي وبنظم حسب الدساتير :

$$(x(\tau), y(\tau)) = \int_0^{\infty} x(\tau) y(\tau) d\tau,$$

$$\|x(\tau)\|^2 = \int_0^{\infty} x^2(\tau) d\tau;$$

نلاحظ ان الحد الاعلى لمجال المكاملة في التكاملين السابقين هو ∞

لكننا نكامل في الواقع على مجال منته. نعتبر من اجل كل $t \in [0, \infty)$ عنصرا من الفضاء $H_2(0, \infty)$ وفق القاعدة:

$$(1) \quad Z(t) \equiv z(t, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq \tau \leq t. \\ 0 & \text{pour } \tau > t. \end{cases}$$

إذا تغير t من 0 الى ∞ فإن النقطة $Z(t)$ ترسم في الفضاء

$H_2(0, \infty)$ منحنيًا L يسمى لولب فينار. إن هذا المنحنى مستمر بانتظام) لأن:

$$\|Z(\bar{t}) - Z(t)\|^2 = \left| \int_t^{\bar{t}} 1^2 \cdot d\tau \right| = |\bar{t} - t|.$$

لنثبت ان المنحنى L متطابق ذاتيا. ليكن عنصراً t_0 بحيث $0 < t_0 < \infty$. نعتبر التحويل U من الفضاء $H_2(0, \infty)$ في نفسه المعروف بالدستور:

$$x(\tau) \rightarrow Ux(\tau) = z(t_0, \tau) + x(\tau - t_0)$$

(من اجل $\tau < t_0$ نضع $x(\tau - t_0) = 0$).

إن هذا التحويل ايزومتري لأن:

$$\begin{aligned} \|Ux(\tau) - Uy(\tau)\|^2 &= \|x(\tau - t_0) - y(\tau - t_0)\|^2 = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} [x(\tau - t_0) - y(\tau - t_0)]^2 d\tau = \int_0^{\infty} [x(\tau) - y(\tau)]^2 d\tau = \|x(\tau) - y(\tau)\|^2 \end{aligned}$$

يطابق نقطة المصدر $Z(0)$ للمنحنى مع صفر الفضاء $H_2(0, \infty)$. يحول التحويل U هذه النقطة الى النقطة $Z(t_0)$. إن كل نقطة $Z(t)$ من المنحنى L تحوّل بواسطة U الى النقطة $Z(t + t_0)$ المنتمية لنفس المنحنى. إذن فإن المنحنى L متطابق ذاتيا.

لنثبت الآن التابع $Z(t)$ ليس له مشتق في الفضاء $H_2(0, \infty)$ ذلك ان الشعاع:

$$(2) \quad \frac{Z(t+h) - Z(t)}{h} = \frac{z(\tau, t+h) - z(\tau, t)}{h}$$

يوافق التابع لـ τ المساوي لـ 0 من اجل $\tau \in [t, t+h]$ ولـ $1/h$ من اجل $\tau \in [t, t+h]$. نظيم هذا الشعاع هو $1/\sqrt{h}$ بجيثان النسبة (2) ليست لها نهاية لما $h \rightarrow 0$.

يتمتع المنحنى L بخاصية هامة اخرى: إن كل وترين موافقين لمجالين غير متقاطعين من مجال تغير الوسيط، هما وتران متعامدان فيما بينهما. ذلك

لأن:

$$\begin{aligned} & (Z(t+h) - Z(t), Z(s+k) - Z(s)) = \\ & = \int_0^{\infty} [z(t+h, \tau) - z(t, \tau)] [z(s+k, \tau) - z(s, \tau)] d\tau = 0 \end{aligned}$$

وهذا إن كان المجالين $(t, t+h)$ و $(s, s+k)$ غير متقاطعين.

يمكن ان ننشئ منحنيات مرنة مائلة للولب فينار إذا عوضنا التابع $z(\tau, t)$ في (1) بمسحوب (عدد t على طول محور العناصر τ) لتابع قابل للإشتقاق مثبت $\varphi_0(\tau)$.

بخصوص مثل هذه التوابع المرنة، يمكننا حساب الانحناءات حسب قواعدنا المعتادة سنجد بطبيعة الحال ان كل هذه الانحناءات ثابتة.

تمارين

1. أثبت ان المحلي الهندسي لمراكز الانحناءات لحلزون في R_3 يمثل ايضا حلزونا له نفس المحور، وان المحل الهندسي لمراكز انحناءات الحلزون الاخير هو الحلزون الاول.

2. أثبت ان كل منحن متطابق ذاتيا في R_n حلزون (وذلك بدون افتراض قابلية الاشتقاق المستمر).

3. ننشء صلة تقابلية بين نقاط منحنين في R_n بحيث تكون أشعة الاساسين الطبيعيين عند نقطتين متقابلتين بواسطة هذه الصلة، متوازية على التوالي. لتكن $x_j^{(2)}$ ، $x_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) انحناءات هذه ين المنحنين، أثبت أن:

$$\frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(2)}} = \frac{x_2^{(1)}}{x_2^{(2)}} = \dots = \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}}$$

4. سطح الكرة الملاصق S_m (في الفضاء ذي البعد m) لمنحن ايسري L هو سطح الكرة في الفضاء ذي البعد $m+1$ المعروف بالاشعة البالغ عددها $(m+1)$ في الاساس الطبيعي بحيث يكون انحراف نقطة من المنحنى L عن سطح الكرة هذه ذا رتبة صفر مساوية لـ $\Delta_{S^{m+1}}$. أثبت أن نصف القطر r_m لسطح الكرة الملاصق (في الفضاء ذي البعد m) لا يتناقص عندما يتزايد m .

5. («منحنى بيانو»). ليكن: $t = 0, t_1 t_2 \dots t_{2n-1} t_{2n} \dots$ النشر الثلاثي المشكل من الرمز 0 و 2 لعدد $t \in (0, 1)$ ، أثبت أن التابعين $x(t) = 0, t_1 t_3 \dots t_{2n-1} \dots$ و $y(t) = 0, t_2 t_4 \dots t_{2n} \dots$ وحيدتا القيمة على مجموعة كل العناصر t من الشكل المشار اليه وانها يقبلان تمديداً مستمرا على المجال $[0, 1]$. أثبت ان المنحنى $r(t) = \{x(t), y(t)\}$ يمر بكل نقاط المربع $0 \leq x \leq 1$ ،

$$0 \leq y \leq 1$$

نبذة تاريخية

فما يخص الفضاء الثلاثي البعد فإن المعادلات الاساسية لنظرية المنحنيات أعطيت من طرف سيري (Serret) (1851) وفريني (1852)، وقام جوردان بتعميم هذه المعادلات الى حالة فضاء ذي n بعدا (1874). وصف فورسيث (Forsythe) (1930) الحلزونات في R_n . تلعب الحلزونات المتطابقة ذاتيا في الفضاء الهيلبرتي دورا هاما في النظرية الحديثة لعلم الاحتمال حيث تسمى «الكيفيات العرضية (أو الستوكاستيكية) للتزايدات المستقرة» (وهي نصف بعض الظواهر الحقيقية مثل الحركة البراونية والحركة المتوترة للسوائل، الخ، راجع في هذا السياق [17] و [7]). درس العديد من كبار علماء عصرنا مثل فينار، فون نومان (Von Neumann)، كولموغوروف (Kolmogorov)، م. كرين (M. Ksfo1) خاصيات مختلفة لهذه المنحنيات. حدد كولموغوروف الشكل القانوني لمنحن متطابق ذاتيا في الفضاء الهيلبرتي، اما كرين فقد اكتشف ان كل «قوس حلزوني» أي جزء منته من منحن متطابق ذاتيا، يكمن تمديده بعدة طرق حتى يصبح يشكل منحنياً متطابقا ذاتيا وكاملا، كما صنف كل التمديدات الممكنة. تعود أعمال المؤلفين السابق ذكرهم، حول المنحنيات المتطابقة ذاتيا في الفضاء الهيلبرتي الى السنوات 1939 - 1943.

حلول واشارات اليها

الفصل 12 .

- 1 . الجواب . نعم في الحالتين أ) . و ب) ، لا في الحالة ج) .
- 2 . اشارة . إن لمجموعة كل المتتاليات المتزايدة المؤلفه من الاعداد اللاطبيعية قوة المستمر (الفصل 2 ، تمرين 8) . اختر بخصوص كل متتالية من هذا النوع ($n_1 < n_2 < \dots$) تابعا $x(t) \in R^s(0, \infty)$ يساوي الوحدة عند النقاط n_1, n_2, \dots وينعدم عند القنانقاط الطبيعية الاخرى .
- 3 . شارة . لو وجد تابعا لكانت قيمته 1 في $0 < x < 1/2$ و -1 في $1/2 < x < 1$.
- 4 . اشارة . يجب اثبات ان (x, y) يحقق مسلمات الجداء السلمي 12.14 . بخصوص المسلمة 14.12 - د ، طبق التوطئة الخاصة بمتوازي الوجوه على متوازيات الوجوه المنشأة على الأشعة $x+z$ ، y ، $x-z$ ، y ، $y+z$ ، x ، $y-z$ ، x . بخصوص المسلمة 14.12 - ج ، اعتبر في البداية عددا α من الاعداد الصحيحة [ثم من الاعداد الكسرية] واخيرا من الاعداد الكيفية وانتقل الى النهاية .
- 5 . اشارة . لدينا حسب نظرية كوشي $\int_{|z|=1} p(z) dz = 0$. تبقى هذه المساواة قائمة عند الانتقال الى النهاية .
- 6 . اشارة . ضع $F = \prod_{f \in \mathcal{F}} \{x \in Q : f(x) = 0\}$ أثبت ان كل تابع $g(x) \in R^s(Q)$ منعدم بجوار المجموعة F ينتمي الى المثالي I . ثم ان كل تابع $f(x) \in R^s(Q)$ منعدم على F هو نهاية توابع من الشكل $g(x)$.
- 7 . اشارة . ليكن $\delta > 0$ عددا يوافق العدد $\varepsilon > 0$ حسب شرط تساوي

استمرار الجماعة E ؛ عندئذ تشكل قيم التتابع $x(t) \in E$ عند نقاط δ - شبكة منتهية من المتراص q - شبكة شبه متراص للمجموعة E .

8. اشارة. يمكن دون المساس بعمومية المسألة، افتراض ان $|\sum_{m=1}^{\infty} t_{km} - 1| < \delta$ وهذا مهما كان $k = 1, 2, \dots$. عرف متتالية عددية N_1, N_2, \dots ومتتالية عددية k_1, k_2, \dots بحيث يكون:

$$\sum_{m=N_1}^{\infty} |t_{1m}| < \delta; \sum_{m=1}^{N_1} |t_{k_1 m}| < \delta; \sum_{m=N_2}^{\infty} |t_{k_2 m}| < \delta; \sum_{m=1}^{N_2} |t_{k_2 m}| < \delta, \dots$$

ضع $\xi_n = 1$ من اجل $N_{2p-1} \leq n < N_{2p}$ ومن اجل $p = 1, 2, \dots$ ، $N_{2p} \leq n < N_{2p+1}$

9. اشارة. يكفي اعتبار المتتاليات $x = \{\xi_n\}$ التي من اجلها يكون

$$\sup \xi_n = \overline{\lim} \xi_n = -\underline{\lim} \xi_n = -\inf \xi_n$$

10. اشارة. استخدم نظرية الوجدانية ومبدأ الذروة (القيمة العظمى) الخاص بالتتابع التحليلية.

11. اشارة. لا يمكن ان يكون لمؤثر الضرب في $\lambda - z$ مؤثر عكسي غير مؤثر الضرب في $1/(z - \lambda)$.

12. اشارة. يمكن استنتاج من 78.12 أن طيف المؤثر A مؤلف فقط من القيم الذاتية المعممة. ثم يجب علينا استنتاج من: $(p(A) - p(\lambda)E)x_n \rightarrow 0$ العلاقة $x_n \rightarrow 0$ ، $(A - \lambda E)x_n \rightarrow 0$ ، واستخدام تراص $p(A)$ والشرط $p(\lambda) \neq 0$

13. اشارة. استخدم التمرين 12.

14. اشارة. يكفي اعتبار الحالة:

$$\int_a^b |x(t)|^p dt = \int_a^b |y(t)|^q dt = 1$$

كامل متراجعة يونغ (16.9 - ط):

$$|x(t)y(t)| \leq \frac{1}{p}|x(t)|^p + \frac{1}{q}|y(t)|^q$$

15 . اشارة . كامل المتراجحة :

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq \\ &\leq |f(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1} + |g(x)|(|f(x)+g(x)|)^{p-1} \end{aligned}$$

وطبق متراجحة هولدر الواردة في الطرف الثاني (تمرين 14) .

16 . اشارة . استخدم طريقة التمرين 14 . بتعويض الكاملة بالجمع .

17 . اشارة . مماثل للتمرين 15 .

18 . اشارة . إذا كانت المتتالية $x_n = \{\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk}, \dots\} \in l_p$

متتالية كوشية فإن المتتالية العددية ξ_{nk} عند تثبيت k كوشية أيضا؛

ليكن $\xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{nk}$. من اجل كل $\epsilon > 0$ ، يوجد N بحيث ، من اجل

كل n و $m \geq N$ ، تتحقق المتراجحة $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{mk}| \leq \epsilon$. عوض هنا ∞ بـ p وانتقل الى النهاية من اجل $m \rightarrow \infty$ ثم من اجل $p \rightarrow \infty$.

19 . اشارة . بتطبيق نظرية آرزيبلا (42.12 - د) أوجد متتالية جزئية

متقاربة بانتظام ، بتطبيق نظرية آرزيبلا مرة أخرى على متتالية اكثر مرونة

تكون فيها المشتقات متقاربة بانتظام ، الخ .، اعتبر فيما بعد المتتالية الجزئية

الفطرية .

20 . اشارة . إن المجموعة $\{x \in R_n : \|x\|_p \leq 1\}$ غير محدبة .

21 . اشارة . بخصوص المجموعة $E \subset P(Q)$ المشكلة من تابع واحد

$x(t)$ يمكن وضع $Q_k = \{t \in Q : ke < x(t) \leq (k+1)e\}$. طبق في

الحالة العامة مقياس هوسدورف 39.3 - ج .

الفصل 13

1 . اشارة . تأكد من شرط ليشيتز .

2 . الجواب . (أ) قطع مكافئ ، (ب) قطع مكافئ نصف تكعيبي .

3 . اشارة . استخدم عبارة الورونسكي (47.13) .

4 . تتحلل الجملة ، ضمن اساس جورداني الى عدد من الجمل المستقلة

يساوي عدد الجذور المميزة. كل جملة تكافىء معادلة من الشكل:
 $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^m u(t) = 0$. اما الجملة بأكملها فهي تكافىء المعادلة:

$$\prod_k \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^{m_k} u(t) = 0$$

5 . اشارة . يحقق المؤثرات Ω_0^t و Ω_T^{t+T} نفس المعادلة ونفس الشرط الابتدائي .

6 . اشارة . عرف المؤثر $A(t)$ على الفضاء الجزئي X_t المولد عن الاشعة:
 $u_k(t) = A(t) u_k(t)$ بالشروط $u_1(t), \dots, u_n(t)$ (حيث
 $k = 1, \dots, n$) ، وضع على المكمل العمودي لـ X_t $A(t)$ منعدما .
 تأكد من استمرار $A(t)$ بالنسبة لـ t .

7 . الجواب . ممكن كمثال ، من اجل $n = 2$ ، يمكن اختيار التابعين :

$$y_1(t) = \begin{cases} t^3 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}, \quad y_2(t) = y_1(-t)$$

8 . الجواب . مثلا :

$$\begin{vmatrix} y^{(n)}(t) & y^{(n-1)}(t) & \dots & y(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_1(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)}(t) & y_n^{(n-1)}(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix} = 0$$

9 . اشارة . تأتي النتيجة ، من اجل $m = 0$ ، من نظرية الوجود . ثم نتبع طريقة التدرج .

10 . اشارة . التعويض $y(t) = e^{kt} z(t)$

11 . اشارة . التعويض : $y(t) = k \int_0^t w(s) ds$

12 . اشارة . يحقق المتراجحة التالية

$$\left\| y(t) - y(0) - \int_0^t f(s, y(s)) ds \right\| \leq \epsilon t$$

استعمل حل التمرين 11 .

13 . اشارة . من اجل $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ ، لدينا :

$$y_{\Pi}(t) = \left\{ (E + (t - t_k) A(t_k)) \prod_{j=k-1}^0 (E + A(t_j) \Delta t_j) \right\} y_0,$$

$$\begin{aligned} y'_{\Pi}(t) &= \left\{ A(t_k) \prod_{j=k-1}^0 (E + A(t_j) \Delta t_j) \right\} y_0 = \\ &= A(t_k) [E + (t - t_k) A(t_k)]^{-1} y_{\Pi}(t) = \\ &= A(t_k) [E + B_k(t)] y_{\Pi}(t) A(t) y_{\Pi}(t) + C_k(t) y_{\Pi}(t) \end{aligned}$$

حيث تؤول المؤثرات $B_k(t)$ و $C_k(t)$ الى الصفر من اجل تقسيم لامنته للتجزئة Π .

14 . اشارة . استعمل حل التمرينين 13 و 12 .

15 . اشارة . طبق طريقة التمرين 13 .

16 . اشارة . استخدم حلول التمرينين 15 و 12 .

الفصل 14

1 . اشارة . عوض في السلاسل المحصل عليها المتغير ببعض القيم العددية .

2 . اشارة . الاشارة السابقة .

3 . الجواب . (أ) $s(x) = e^{\cos x} \cos(x \sin x)$

(ب) $s(x) = e^{\cos x} \sin(x \sin x)$

4 . اشارة . تقبل هذه المجموعة شبه المتراصة نقطة نهاية وحيدة .

5 . اشارة . طبق نظرية المتوسط الثانية (تمرين 3 من الفصل 9) .

6 . اشارة . عين بدقة مناسبة حل التمرين 5 .

7 . اشارة . لدينا من اجل n زوجي

$$\frac{4}{\pi} b_n = \int_0^{\pi/2} f(t) \sin nt \, dt = \int_0^{\pi/n} f(t) \sin nt \, dt + \int_{\pi/n}^{\pi/2} f(t) \sin nt \, dt$$

ويكفي ان نبرهن على أن :

$$I_1 = \int_0^{\pi/n} f(t) \sin nt \, dt = \frac{\beta_n}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \beta_n \rightarrow 2$$

$$I_2 = \int_{\pi/n}^{\pi/2} f(t) \sin nt \, dt = -\frac{1}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + \gamma_n, \quad \sum_1^{\infty} |\gamma_n| < \infty$$

نعوض في الحالة الاولى nt بـ τ وفي الثانية نكامل بالتجزئة مع تطبيق نظرية المتوسط والتمرين 16 من الفصل 7.

8. اشارة. ضف $= \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right)$ الى الشروط (1 - 4) من التمرين 7. استعمال التمرين 6.

9. اشارة. اكتب سلسلة فوريي للتابع $f(t)$ الوارد في التمرين 8 على شكل عقدي.

10. اشارة. $(xQ_n, Q_k) = (Q_n, xQ_k)$ ، ثم إن xQ_k كثير حدود درجته أصغر من n ، وهذا من اجل $n - 1 < k$ ، وبالتالي لدينا :

$$(1) \quad xQ_n(x) = \gamma_{n+1}Q_{n+1}(x) + \gamma_n Q_n(x) + \gamma_{n-1}Q_{n-1}(x)$$

حيث γ_{n-1} ، γ_n ، γ_{n+1} ثوابت. قارن معاملات x^{n+1} و x^n واحسب (xQ_n, Q_{n-1}) .

11. اشارة. اضرب (1) في $Q_n(t)$. بتعويض t بـ x و x بـ t اطرح المتطابقة المحصل عليها من المتطابقة السابقة. اجمع بالنسبة لـ n .

12. اشارة. تنتج الخاصية الاولى من التعامد على (1) ، اما الثانية فتأتي من التعامد على كثير الحدود $\prod_{k=1}^m (x - x_k)$ وذلك فافتراض أن x_1, \dots, x_m كلها جذور لكثير الحدود $Q_n(t)$ وأن $m < n$.

الفصل 15

1. اشارة. طبق طريقة التمرينين 5 و 6 من الفصل 14.

2. اشارة. استخدم فكرة حل التمرين 8 من الفصل 14.

3. اشارة. استخدم فكرة حل التمرين 9 من الفصل 14.

4. اشارة. تأكد من ذلك باعتبار توابع الصنف s (92.15 - أ) ، ثم من

اجل التابع $f_N(x)$ المساوي لـ $f(x)$ من اجل $|x| \leq N$ وللصفر من

اجل $|x| > N$ وذلك بأن نقربه بواسطة توابع الصنف s ، اجر الانتقال

الى النهاية $N \rightarrow \infty$.

5. اشارة. اعتبر التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |ix \varphi(x) + \varphi'(x)|^2 dx \geq 0$ كثنائي حدود من الدرجة الثانية بالنسبة للوسيط x .

6. الجواب. $F_1(p) = F(p-a)$ ، $F_2(p) = pF(p)$ ،

حيث اخذنا $F_3(p) = \frac{1}{p} F(p)$ ، $F_4(p) = -F'(p)$ ، $F_5(p) = \int_0^{\infty} F(s) ds$ ، حيث اخذنا التكامل على طول أي سبيل يتعد الى لانهايه في نصف المستوى: $\text{Re } p > \gamma_0$

7. الجواب. $\Phi_1(p) = \frac{1}{p-a}$ ، $\Phi_2(p) = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}$ ، $\Phi_3(p) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(p-a)^\alpha}$ ،

$\Phi_4(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$ ، $\Phi_5(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$ ، $\Phi_6(p) = \frac{1}{a} \arctg \frac{a}{p}$ (من اجل $p > 0$).

8. اشارة. ضع $x = e^t$.

الفصل 16

1. بخصوص الحلزون $r = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$ فإن حلزون مراكز الانحناء له b^2/a كنصف قطر مسقطه على المستوى الافقي.

2. اشارة. إن التحويلات المتعامدة للتطابق الذاتي تتبادل فيما بينها، وعليه تقبل اساسا قانونيا مشتركا.

3. اشارة. إن كل النسب المشار اليها تساوي $ds^{(1)}/ds^{(2)}$.

4. اشارة. $S_{m-1} \subset S_m$.

5. اشارة. استخدم النشر العشري لإحداثيتي نقطة معطاة في المربع.

الدليل العلمي

Algèbre	جبر
Commutative	تبديلي
de Gelfand	غالفوند
normée	نظيمي
quotient	النسبة
Alternative de Fredholm	متناوبة فريدولم
Application	تطبيق
Contractante	مقلص
Arzelà	ارزيلا
Ascoli	آسكولي
Banach	باناخ (أو بناخ)
Base	أساس
Jordanienne	جورداني
- réelle	- حقيقي
Naturelle	طبيعي
Orthonormée	متعامد ومتجانس
Bernoulli	بارنولي
Bourbaki	بورباكي
Bromwich	برومويش
Carleman	كارلمان
Carson	كارسون
Case jordanienne	خانة جوردانية
Cauchy	كوشي
Centre de Courbure	مركز انحناء
Cercle osculateur	دائرة ملاصقة
Cesàro	سيزارو
Classe	صف
d'équivalence	تكافؤ
S	S

W_M
 W_Ω

W_M
 Ω

Classes quasi analytiques

اصناف شبه تحليلية

Coefficients de Fourier

معاملات فورييه

Cowplété

تتمة

d'un espace hilbertien

فضاء هيلبرتي

- normé

- نظيمي

Condition de Dini

شرط ديني

unilatérale

وحيد الجانب

Condition de Lipschitz

شرط ليبشيتز

d'ordre α

من الرتبة α

Convolution de fonctions

توزيع توابع

Corde

وتر

Symétrique

متناظرة

Courbe

منحن

autocongruente

متناطبق ذاتيا

de Peano

بيانو

dans R_n

في R_n

Courbure

الحناء

Courbures d'ordre supérieur

الحناءات من رتب عالية

Critère

مقياس (أو قاعدة)

d'Abel-Dirichlet

آبل - ديركليت

de Cauchy

كوشي

de Weierstrass

فيرشتراس

d'Alembert

دالمبار (أو دالمبير)

Demi-droite de Vallron

نصف مستقيم فاليريون

Denjoy

دنجوي

Dépendance Linéaire

عدم الاستقلال الخطي

Déterminant de Wronski

معين ورونسكي

Développement d'un vecteur

نشر شعاع

Suivaut une base

وفق اساس

Dini

ديني

Dirac	ديراك
Dirichlet	دير كليت
Distance	مسافة
Diviseur généralisé de zéro	قاسم معمم للصفر
Doetsch	دوتش -
Du Bois-Reymond	دي بوا ريمون
Egalité de Parseval	مساواة بارسفال
Élément	عنصر
inverse	مقلوب
opposé	مقابل
Engels	انغلس
Ensemble	بجموعة
absolument convexe	محدبة مطلقا
Convexe	محدبة
équilibré	متوازنة
partout dense	كثيفة اينما كان
Enveloppe convexe	مغلف محدب
fermée	مغلق
Epimorphisme	تمائل غامر
de l'algèbre	لجبر
Equation(s)	معادلة (معادلات)
Caractéristique	مميزة
différentielle	تفاضلية
- Linéaire homogène	- خطية متجانسة
- - non homogène	- - غير متجانسة
Naturelles	طبيعية
Espace(s)	فضاء (ات)
de Banach	باناخ - (أو باناخي)
Complexe	عقدي
dual	ثنوي
de Hilbert	هيلبرت (أو هيلبرتي)
- complexe	عقدي

métrique	مترى
- Compact	- متراص
- précompact	- شبه متراص
- Séparable	- قابل للإنفصال
Normé	نظىمى
des opérateurs Linéaires	المؤثرات الخطىة
Préhilbertien	شبه هىلبرتى
quotient	النسبة
réel	حقىقى
Vectoriel	شعاعى
- affine	- تألفى
- Complexe	- عقدى
- de dimension infinie	- ذو بعد غير منته
-- n	-- n
- normé	- نظىمى
-- complexe	-- عقدى
-- réel	-- حقىقى
- réel	- حقىقى
$C^s(M)$	$C^s(M)$
$D_m(a,b)$	$D_m(a,b)$
K^n	K_n
$K(E)$	$K(E)$
$K(E)$	$K(E)$
l_p	l_p
$l^s(a,b)$	$l^s(a,b)$
$L_p^s(a,b)$	$L_p^s(a,b)$
$P^s(M)$	$P^s(M)$
$R(E)$	$R(E)$
$R(e)$	$R(E)$
$R^s(M)$	$R^s(M)$
$R_n^s(M)$	$R_n^s(M)$
Euler	أولر

Famille Séparatrice des points	جماعة فاصلة لنقاط
Fonction	تابع
duale	ثنوي
entière de type exposantiel fini	صحيح من النمط الاسي المنتهي
Séparatrice des points	فاصل لنقاط
à valeurs dans un espace normé	ذو قيم في فضاء نظيمي
Fonctionnelle linéaire	تابعية خطية
Formule d'inversion	دستور القلب
de Fourier	لفوريي
de Laplace	للابلاس
de Mellin	لميلين
Formule de Taylor	دستور تايلور
Formule de Frénet	دستور فريني
Forsythe	فورسايت
Fourier	فوريي
Fredholm	فريدولم
Frénet	فريني
Gelfand	غالفوند
Grassmann	غراسمان
Hahn	هان
Heaviside	هيفسايد
Hélice	حلزون
dans un espace de dimension infinie	في فضاء ذي بعد غير منته
dans R_3	في R_3
dans R_n	في R_n
Hilbert	هيلبرت
Hobson	هوبسن
Idéal	مثالي
Identité de Christoffel-Darboux	متطابقة كريستوفال - داربو
Inégalité	متراجحة
de Bessel	بيسل
de Hölder	هولد

de Young	يونغ
Intégrale	تكامل
de Fourier	فوريي
-, Formule d'inversion	، دستور القلب
multiplicative	الضربي
de Poisson	بواسون
Isomorphisme	تشاكل
de l'algèbre	الجبر
Jordan	جوردان
Keldych	كلديش
Kolmogorov	كولموغوروف
Krein	كرين
Lagrange	لاگرانج
Laplace	لابلاس
Legendre	لوجاندر
Leibniz	ليبنيز
Lemme sur le parallélogramme	توطئة حول متوازي الاضلاع
Limite généralisée	النهاية المعممة
de Cesàro	لسيزارو
de Toeplitz	لتوبليتز
de Voronoi	لفرورونوي
Lipschitz	ليبشيتز
Livchitz	ليفشيتز
Longueur	طول
Matrice jordanienne	مصفوفة جوردانية
réelle	حقيقية
Matrice de Wronski	مصفوفة ورونسكي
Membrane	غشاء
Monomorphisme	تماثل متباين
Morphisme	تماثل

de L'algèbre	جبر
Multiplication des opérateurs	ضرب المؤثرات
Neumann	نومان
Neumann Von	نومان فون
Newton	نيوتن
Norme	نظيم
d'un opérateur linéaire	مؤثر خطي
d'un vecteur	شعاع
Normes équivalentes	نظيمات متكافئة
Noyau	نواة
de Dirichlet	دير كليت
de Fejér	فيجير
- pour L'intégrale de Fourier	- لتكامل فوريي
de Fourier-Legendre	لفوريي - لوجاندر
de Poisson	بواسون
Opérateur	مؤثر
Compact	متراص
de Fredholm	فريدولم
inverse	مقلوب
Linéaire	خطي
- borné	- محدود
- Compact	- متراص
- Continu	- مستمر
résolvant	حال
- d'une équation linéaire	- لمعادلة خطية
de Volterra	فولترا
Orthogonalisation	معامدة
Orthogonalité	تعامد
Ostrovski	أوستروفسكي
Peano	بيانو
Perpendiculaire	عمودي
Picard	بيكار
Point(s)	نقطة (أو نقاط)

Fixe	ثابتة (أو صامدة)
Ordinaire	عادية
Singulier	شاذة
de Valiron	فالبرون
Polynômes	كثيرات حدود
d'Hermite	هيرميت
de Jacobi	جاكوبي
de Laguerre	لاغير
de Legendre	لوجاندر
de Tchébychev	تشيبشاف
Presque-solution	حل تقريبا
Principe du point fixe	مبدأ النقطة الثابتة (أو الصامدة)
Problème	مسألة
des isopérimètres	المحيطات المتساوية
de Watson	واتسن
Produit	جداء
Cartésien	ديكارتي
de Convolution	توزيع
d'un opérateur par un nombre	مؤثر في عدد
Projection d'un vecteur sur un sous-espace	مسقط شعاع على فضاء جزئي
Rayon de courbure	نصف قطر الانحناء
Rayon vecteur	نصف قطر شعاع
Réseau Linéaire	شبكة خطية
Riesz F	ريس ف
Rodrigues	رودريغاس
Schmidt	شميت
Schwartz	شفارتز
Série	سلسلة
de Fourier	فوريي
de Fourier-Legendre	فوريي - لوجاندر
de Vecteurs	أشعة
Serret	سيرري

Sobolev	سوبولوف
Solution	حل
de l'équation différentielle	المعادلة التفاضلية
générale	عام
particulière	خاص
Somme	بمجموع
directe	مباشر
d'opérateurs	مؤثرات
Sous-algèbre	جبر جزئي
Sous-espace	فضاء جزئي
invariant	لا متغير
osculateur	ملاصق
propre	ذاتي
Spectre	طيف
d'un élément de l'algèbre	عنصر من جبر
d'un opérateur linéaire	مؤثر خطي
Symétrique	متناظر
Sphère osculatrice	سطح كرة ملاصق
Spirale de Wiener	لولب فينار
Stone	ستون
Suite(s)	متتالية (أو متتاليات)
convergente	متقاربة
en forme de delta	في شكل دلتا
Suite d'opérateurs	مؤثرات
convergente	متقاربة
Fortement convergente	متقاربة بقوة
Système orthonormé	جملة متعامدة ومتجانسة
Tait	تايت
Tangente	مماس
Théorème	نظرية
d'Arzelà	ارزيبلا
de Banach	باناخ
de Banach-Steinhaus	باناخ - ستينهاوس

de Broudno	برودنو
de Carleman-Ostrovski	كارلمان - اوستروفسكي
de Carleson	كاعرلسون
de Fejér	فيجير
de Gelfand-Mazur	غالفوند - مازير
de Jackson	جاكسن
de Nikolski	نيكولسكي
de Pythagore	فيثاغورس
de Riesz	ريس
de Robinson	روبسن
de Stone	ستون
de Toeplitz	توبليتز
de Weierstrass	فيرشتراس
Thomson	تومسن
Toeplitz	توبليتز
Torsion	التواء (لي)
Transformée	مُحوّلة
de Fourier	فوريي
de Laplace	لابلاس
Unité d'une algèbre	وحدة جبر
Valeur propre	قيمة ذاتية
généralisée	معمة
Van der Pol	فان دار بول
Vecteur courbure	شعاع انحناء
Vecteur nul	شعاع منعدم
Vecteur propre	شعاع ذاتي
Vecteurs	أشعة
Volterra	فولتيرا
Voronoi	فورونوي
Watson	واتسن
Weierstrass	فيرشتراس
Weiner	فينار
Wronski	ورونسكي

المراجع

- [1] م. س. برودسكي، التمثيل المثلي والجورداني
- [1] М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, «Наука», 1969.
- [2] ل. برودنو، الجمع المحدود لتتاليات المصفوفات.
- [2] А. Л. Брудно, Суммирование ограниченных последовательностей матрицами, Матем. сб., т. 16, стр. 191-245, 1945.
- [3] م. غالند، د. أ. رايكوف، ج. أ. شيلوف
- [3] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шиллов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, 1960.
- [4] أ. تس. غوخبارغ، م. غ. كرين
- [4] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.
- [5] أ. تس. غوخبارغ، م. غ. كرين، نظرية مؤثرات فولترا في الفضاءات الهيلبرتية وتطبيقاتها.
- [5] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Теория вольторровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967.
- [6] س. ماندلبرويت،
- [6] С. Мандельброт, Квазианалитические классы функций, Гостехиздат, 1936.
- [7] أ. س. موني، أ. م. ياغلوم،
- [7] А. С. Мошин и А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, «Наука», 1967, т. 2, гл. 8.
- [8] م. أ. نايمارك،
- [8] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, изд. 2-в, «Наука», 1968.
- [9] أ. ب. ناتانسون، النظرية الإنشائية للتوابع.
- [9] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.-Л., 1949.
- [10] ب. ب. بالامودوف، المؤثرات الخطية التفاضلية ذات المعاملات الثابتة.
- [10] В. П. Паламодов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», 1967.

- [11] أ. غ. بيتروفسكي،
دروس في المعادلات ذات المشتقات الجزئية
- [11] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961 (3. изд.), гл. II, § 9; гл. III, § 28; гл. IV.
- [12] غ. م. فيختنغولتس،
دروس في الحساب التفاضلي والتكاملي.
- [12] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Гостехиздат, 1949, гл. XIX, § 5.
- [13] ج. أ. شيلوف
التحليل الرياضي.
- [13] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Второй специальный курс, «Наука», 1965.
- [14] ج. أ. شيلوف
التحليل الرياضي.
- [14] Г. Е. Шилов, Математический анализ. Копечномерные линейные пространства, «Наука», 1969.
- [15] ج. أ. شيلوف
التحليل الرياضي.
- [15] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Специальный курс, Физматгиз, 1961; стр. 262.
- [16] ج. أ. شيلوف، ب. ل. غوريفيتش
التكامل، القياس، المشتق.
- [16] Г. Е. Шилов и Б. Л. Гуревич, Интеграл, мера и производная, М., 1967 гл. 2.
- [17] م. ياغلوم،
الاحداث العشوائية ذات التزايد المستقرة.
- [17] А. М. Яглом, Случайные процессы со стационарными приращениями, Успехи мат. наук, 1952, т. 7, № 5.
- [18] ر. اغنيو، تكافؤ طرق تقدير المتتاليات.
- [18] R. Agnew, Equivalence of methods for evaluation sequences, Proc. Amer. Math. Soc, t.3, S. 550 - 565, 1952
- [19] ج. ألكسيتس، مسائل تقارب السلاسل المتعامدة.
- [19] G. Alexits, Convergence problems of orthogonal series. Lnd [a.o], Pergamon Press, 1961
- [20] س. باناخ، نظرية العمليات الخطية.
- [20] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, N.Y.Chelsea publ. Co., 1955.
- [21] ر. كوك، المصفوفات غير المنتهية وفضاءات المتتاليات.
- [21] R. Cooke, Infinite matrice and sequence spaces. Lnd., Macmillan, 1950.

-
- [22] . ر . كورنت ، د . هيلبرت ، الطرق (المستخدمة) في الفيزياء الرياضية .
- [22] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, vol. 1, New York - London 1955.
- [23] أ . غالفند ، ج . شيلوف ، التوزيعات .
- [23] I. Guelfand, G. Chilov, Les distributions, Dunod, 1962 - 1976
- [24] د . جاكسون ، سلاسل فورييه وكثيرات الحدود المتعامدة .
- [24] D. Jackson, Fourier series and orthogonal polynomials, 3rd. ed., Carus Mathematical Monographs, Oberlin (Ohio), 1948.
- [25] ست . كازمارز ، هـ . شتاينهوس ، نظرية السلاسل المتعامدة .
- [25] st. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie des orthogonalreihen, Warszawa - Lwow, 1935
- [26] ف . سميرنوف ، دروس في الرياضيات العالية ، ج 3 ، القسم 2 ، الفصل 8. 1. 6 مطبعة جامعة دمشق (ترجمة) ، 1973 .

الفهرس

3	تمهيد
5	القسم الثالث
5	فصول مختارة من التحليل الحديث
6	الفصل 12 . البنيات الاساسية للتحليل .
7	§ 12.1 . الفضاءات الشعاعية .
34	§ 12.2 . الفضاءات المترية .
48	§ 12.3 . الفضاءات الشعاعية النظيمية .
68	§ 12.4 . الفضاءات الهيلبرتية .
	§ 12.5 . التقريبات في فضاء التوابع المستمرة على
83	متراس .
	§ 12.6 . اشتقاق ومكاملة التوابع التي تأخذ قيمتها في
99	فضاء نظيمي .
115	§ 12.7 . المؤثرات الخطية المستمرة .
140	§ 12.8 . الجبور النظيمية .
150	§ 12.9 . الخاصيات الطيفية للمؤثرات الخطية .
162	تمارين
167	نبذة تاريخية

169	الفصل 13 . المعادلات التفاضلية :
169	§ 13.1 . تعاريف وأمثلة
185	§ 13.2 . نظرية النقطة الصامدة
	§ 13.3 . وجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية في فضاء نطيمي .
188
196	§ 13.4 . جملة المعادلات الشعاعية
199	§ 13.5 . المعادلات الشعاعية من الرتب العالية
202	§ 13.6 . المعادلات والجمال الخطية
206	§ 13.7 . المؤثر الحال لمعادلة خطية متجانسة
210	§ 13.8 . حل معادلة خطية غير متجانسة
214	تمارين
217	نبذة تاريخية
218	الفصل 14 . النشور المتعامدة .
218	§ 14.1 . النشور المتعامدة في فضاء هيلبرتي .
224	§ 14.2 . سلاسل فوريي التقليدية
230	§ 14.3 . تقارب سلسلة فوريي عند نقطة وعلى مجموعة
239	§ 14.4 . خاصيات اخرى لسلاسل فوريي . تطبيقات
255	§ 14.5 . تباعد سلاسل فوريي والجمع المعمم
261	§ 14.6 . أمثلة في الجمال المتعامدة
267	تمارين
270	نبذة تاريخية

271	الفصل 15 . تحويل فوريي
271	§15. 1. تكامل فوريي ومقلوبه .
278	§15. 2. خاصيات أخرى لتكامل فوريي .
293	§15. 3. أمثلة وتطبيقات .
296	§15. 4. تحويل لابلاس .
306	§15. 5. اصناف التوابع شبه التحليلية .
318	تمارين
320	نبذة تاريخية
321	الفصل 16 . المنحنيات الاساسية .
321	§16. 1. تعاريف اساسية .
331	§16. 2. الانحناء ، الانحناءات من الرتب العالية .
340	§16. 3. انحلال الاساس الطبيعي .
343	§16. 4. المعادلات الطبيعية .
347	§16. 5. الحلزونات .
355	تمارين
356	نبذة تاريخية
357	حلول واشارات اليها
364	الدليل العلمي .
374	المراجع

-
- [20] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, N.Y. Chelsea publ. co., 1955.
- [21] R. Cooke, *Infinite matrice and sequece spaces*. Lnd., Macmillan 1950.
- [22] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. 1, New York-London 1955.
- [23] I. Guelfand et G. Chilov, *Les distributions*, Dunod, 1962-1967.
- [24] D. Jackson, *Fourier series and orthogonal polynomials*, 3rd. ed., Carus Mathematical Monographs, Oberlin (Ohio) 1948.
- [25] St. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie des Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwow 1935.
- [26] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, t. III, 2^e partie, VI-1-8, Editions de Moscou 1972.

Bibliographie

- [1] М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, «Наука», 1969.
- [2] А. Л. Брудно, Суммирование ограниченных последовательностей матрицами, Матем. сб., т. 16, стр. 191-245, 1945.
- [3] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шиллов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, 1960.
- [4] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.
- [5] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967.
- [6] С. Мандельброт, Квазианалитические классы функций, Гостехиздат, 1936.
- [7] А. С. Монин и А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, «Наука», 1967, т. 2, гл. 8.
- [8] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, изд. 2-е, «Наука», 1968.
- [9] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.-Л., 1949.
- [10] В. П. Паламонов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», 1967.
- [11] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961 (3. изд.), гл. II, § 9; гл. III, § 28; гл. IV.
- [12] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Гостехиздат, 1949, гл. XIX, § 5.
- [13] Г. Е. Шиллов, Математический анализ, Второй специальный курс, «Наука», 1965.
- [14] Г. Е. Шиллов, Математический анализ. Конечномерные линейные пространства, «Наука», 1969.
- [15] Г. Е. Шиллов, Математический анализ, Специальный курс, Физматгиз, 1961; стр. 262.
- [16] Г. Е. Шиллов и Б. Л. Гуревич, Интеграл, мера и производная, М., 1967 гл. 2.
- [17] А. М. Яглом, Случайные процессы со стационарными приращениями, Успехи мат. наук, 1952, т. 7, № 5.
- [18] R. Agnew, Equivalence of methods for evaluation sequences, Proc. Amer. Math. Soc., t. 3, S. 550-565, 1952.
- [19] G. Alexits, Convergence problems of orthogonal series. Lnd [a.o.], Pergamon Press, 1961.